

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**  
**ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ**  
**ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**

Υποβιβασμός τάξης μεγάλων μοντέλων με προσεγγιστικές  
μεθόδους παραγοντοποίησης χαμηλού βαθμού

Model Order Reduction with low rank factorization  
methods

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Διαμαντάκη Μαρία  
Ρόση Αλεξάνδρα  
Ρόση Ερμιόνη

**Υπεύθυνος Καθηγητής:** Νέστωρ Ευμορφόπουλος,  
Επίκουρος Καθηγητής

**Συνεπιβλέπων Καθηγητής:** Γεώργιος Σταμούλης,  
Καθηγητής

Βόλος, Ιούνιος 2017

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.



Υποβιβασμός τάξης μεγάλων μοντέλων με προσεγγιστικές μεθόδους  
παραγοντοποίησης χαμηλού βαθμού

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Διαμαντάκη Μαρία  
Ρόση Αλεξάνδρα  
Ρόση Ερμιόνη

**Υπεύθυνος Καθηγητής:** Νέστωρ Ευμορφόπουλος  
Επίκουρος Καθηγητής

**Συνεπιβλέπων Καθηγητής:** Γεώργιος Σταμούλης,  
Καθηγητής

*Εγκρίθηκε από την διμελή εξεταστική επιτροπή την 5<sup>η</sup> Ιουλίου 2017.*

.....  
Νέστωρ Ευμορφόπουλος,  
Επίκουρος Καθηγητής

.....  
Γεώργιος Σταμούλης,  
Καθηγητής

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση του Διπλώματος των Μηχανικών Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, στα πλαίσια του Προγράμματος Προπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

.....

Διαμαντάκη Μαρία

Ρόση Αλεξάνδρα

Ρόση Ερμιόνη

Διπλωματούχοι Μηχανικοί Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Copyright © Diamantaki Maria, Rosi Aleksandra, Rosi Ermioni, 2017

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τους συγγραφείς.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τους συγγραφείς και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

*Στην οικογένεια & στους φίλους μας*

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.



## Ευχαριστήριο Σημείωμα

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να εκφράσουμε ιδιαίτερες ευχαριστίες σε ορισμένους ανθρώπους, των οποίων η συμβολή και η συμπαράσταση ήταν πολύτιμη και καθοριστική στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας κατά το ακαδημαϊκό έτος 2016-2017.

Καταρχήν θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τον κ.Νέστωρ Ευμορφόπουλο, επίκουρο καθηγητή του τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών στο Βόλο και κύριο επιβλέποντα της παρούσας εργασίας για την παραπάνω από χρήσιμη βοήθειά του. Θέλουμε να τον ευχαριστήσουμε για την καθοδήγηση, τις πολύτιμες συμβουλές και παρατηρήσεις επί της οργάνωσης, της δομής και του περιεχομένου της εργασίας. Βασικά στοιχεία της συνεργασίας μας για τα οποία είμαστε ιδιαίτερα ευγνώμων ήταν η άμεση επικοινωνία καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας καθώς και η αναλυτική επεξήγηση του επιστημονικού υποβάθρου με τις άριστες γνώσεις που διαθέτει στον τομέα πάνω στον οποίο βασίστηκε η διπλωματική εργασία μας. Συγχρόνως θέλουμε να ευχαριστήσουμε τον κ.Γεώργιο Σταμούλη καθηγητή του τμήματος και δεύτερο επιβλέποντα της συγκεκριμένης εργασίας για τις αξιόλογες υποδείξεις του και για την εξίσου καλή συνεργασία που είχαμε όλο αυτό το διάστημα.

Επιπροσθέτως θα θέλαμε να εκφράσουμε τις ευχαριστίες μας στον διδακτορικό φοιτητή του τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών κ.Γεώργιο Φλώρο για την άμεση ανταπόκριση και υποστήριξη όσον αφορά θέματα υλοποίησης και αποσφαλμάτωσης κώδικα. Η συμβολή του ήταν πολύ σημαντική στην περάτωση του αλγοριθμικού μέρους της εργασίας.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στις οικογένειες μας, για την αμέριστη συμπαράσταση και τη συνεχή ενθάρρυνση που μας επέδειξαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μας αλλά και στους φίλους μας για τα υπέροχα φοιτητικά χρόνια που μας χάρισαν. Αυτή η εργασία είναι αφιερωμένη σε σας, επειδή χωρίς την υποστήριξή σας, τίποτα από αυτά δεν θα ήταν εφικτό.

**ΒΟΛΟΣ,ΙΟΥΝΙΟΣ2017**

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κατάλογος Αλγορίθμων .....	xiii
Κατάλογος Εικόνων .....	xiv
Κατάλογος Πινάκων .....	xvi
Κατάλογος Συντομογραφιών .....	xvii
Κατάλογος Σχημάτων .....	xviii

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	xix
----------------	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....	1
------------------	---

## Εισαγωγή

1.1 Περιγραφή του προβλήματος .....	1
1.2 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας .....	2
1.3 Διάρθρωση της εργασίας .....	4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....	7
------------------	---

## Μαθηματικό υπόβαθρο

2.1 Κατηγορίες συστημάτων .....	7
2.1.1 Στατικά συστήματα .....	8
2.1.2 Δυναμικά συστήματα .....	9
2.1.3 Γραμμικά Χρονικά αμετάβλητα συστήματα .....	10
2.2 Χώρος κατάστασης .....	10
2.2.1 Ορισμοί Δυναμικών Συστημάτων .....	10
2.2.2 Εύρεση Συνάρτησης Μεταφοράς από Δυναμικές Εξισώσεις ...	13
2.2.3 Ευστάθεια και Παθητικότητα ΓΧΑ Συστημάτων .....	14
2.2.4 Μηδενικά και Πόλοι .....	15
2.3 Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα .....	16
2.3.1 Πίνακες Ελεγχιμότητας και Παρατηρησιμότητας .....	17
2.3.2 Γραμμιανοί πίνακες .....	17
2.4 Μοντελοποίηση ηλεκτρικών κυκλωμάτων .....	18
2.4.1 Βασικές έννοιες ηλεκτρικών κυκλωμάτων .....	18
2.4.2 Βασικά κυκλωματικά στοιχεία .....	19
2.4.3 Νόμοι του Kirchhoff .....	21
2.4.4 Πίνακας πρόσπτωσης - Γενίκευση νόμων Kirchhoff .....	22

2.4.5 Τροποποιημένη ανάλυση κόμβων .....	24
2.4.6 Συσχετισμός των MNA εξισώσεων με τις δυναμικές εξισώσεις ..	27
2.5 Χρήσιμες έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας .....	30
2.5.1 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα .....	30
2.5.2 Μετασχηματισμοί ομοιότητας πινάκων .....	31
2.5.3 Διανυσματικοί χώροι .....	31
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....</b>	<b>34</b>
<b>Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR)</b>	
3.1 Εισαγωγή στους Mor αλγόριθμους .....	34
3.2 Η γενική ιδέα των Mor αλγορίθμων .....	35
3.3 Βασικές κατηγορίες μεθόδων Mor .....	37
3.3.1 <i>Singular value decomposition</i> μέθοδοι .....	38
3.3.2 <i>Krylov subspace</i> μέθοδοι .....	40
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 .....</b>	<b>42</b>
<b>Truncated Balanced Realization (TBR)</b>	
4.1 Ορισμός μεθόδου TBR .....	42
4.2 Υλοποίηση μεθόδου TBR .....	43
4.3 Προσέγγιση λύσης Lyapunov με Low Rank μεθόδους .....	47
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....</b>	<b>50</b>
<b>Low Rank Cholesky Factorized Alternating Directions Implicit (LRCF-ADI)</b>	
5.1 ADI επανάληψη .....	50
5.2 Υλοποίηση μεθόδου LRCF-ADI .....	51
5.3 Κριτήριο τερματισμού .....	55
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 .....</b>	<b>58</b>
<b>Extended Krylov Subspace Method (EKSM)</b>	
6.1 Standard Krylov Subspace μέθοδοι .....	58
6.2 Μέθοδοι προβολής για τις Krylov Subspace μεθόδους .....	59
6.3 Υλοποίηση μεθόδου EKSM .....	61
6.4 Κριτήριο τερματισμού .....	63
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 .....</b>	<b>66</b>
<b>Υλοποίηση της προσομοίωσης</b>	
7.1 Κατασκευή Προσομοιωτή .....	66
7.2 Αρχείο περιγραφής κυκλώματος .....	66

7.3 Χρήση του πίνακα κατακερματισμού .....	67
7.4 MNA σύστημα του κυκλώματος .....	68
7.5 Χρήση μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου .....	68
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8.....</b>	<b>71</b>
<b>Εκτίμηση της λύσης -Αποτελέσματα</b>	
8.1 Ανάλυση υλοποίησης .....	71
8.2 Ενδεικτικά Αποτελέσματα Προσομοίωσης .....	73
8.3 Παρατηρήσεις .....	82
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 .....</b>	<b>84</b>
<b>Επίλογος</b>	
9.1 Μελλοντικές επεκτάσεις .....	85
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>85</b>

# **Κατάλογος Αλγορίθμων**

Truncated Balanced Realization

Low Rank Cholesky Factorized Alternating Directions Implicit

Krylov Subspace Method

Extended Krylov Subspace Method

## Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1.1: Ο σκοπός της παρούσας εργασίας .....	3
Εικόνα 2.1: Σχέση εισόδου- εξόδου συστήματος .....	8
Εικόνα 2.2: Κύκλωμα αντίστασης που διεγείρεται από μία τάση εισόδου $u(t)$ .....	8
Εικόνα 2.3: Διάγραμμα κυκλωμάτων δυναμικού συστήματος που εκφράζεται σε περιγραφή κατάστασης- χώρου .....	9
Εικόνα 2.4: Παράδειγμα ενδεικτικού κυκλώματος RLC .....	11
Εικόνα 2.5: Εύρεση συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ .....	13
Εικόνα 2.6: Γεωμετρικός τόπος των ριζών .....	16
Εικόνα 2.7: Ενδεικτικό παράδειγμα: αρχικό κύκλωμα .....	23
Εικόνα 2.8: Ενδεικτικό παραδ. πορεία προς τον τελικό γράφο .....	24
Εικόνα 2.9: Ενδεικτικό παράδειγμα δημιουργίας MNA εξισώσεων .....	29
Εικόνα 3.1: Ελαχιστοποίηση τάξης συστήματος .....	35
Εικόνα 3.2: Η γενική ιδέα του Model Order Reduction .....	36
Εικόνα 3.3: Τα βασικά βήματα της μείωσης των διαστάσεων χρησιμοποιώντας SVD μεθόδους .....	39
Εικόνα 3.4: Τα βασικά βήματα της μείωσης των διαστάσεων χρησιμοποιώντας Krylov Subspaces μεθόδους .....	40
Εικόνα 7.1: Παράδειγμα χρήσης hashtable .....	67
Εικόνα 8.1: Η μείωση της νόρμας της διαφοράς των δύο συναρτήσεων μεταφοράς συναρτήσει των ιδιάζουσων τιμών της LFCR-ADI μεθόδου .....	74

Εικόνα 8.2: Η μείωση της νόρμας της διαφοράς των δύο συναρτήσεων μεταφοράς συναρτήσει των ιδιάζουσων τιμών της EKSM μεθόδου .....	74
Εικόνα 8.3: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 1η είσοδο με την LRCF ADI-TBR .....	77
Εικόνα 8.4: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 2η είσοδο με την LRCF ADI-TBR .....	77
Εικόνα 8.5: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 3η είσοδο με την LRCF ADI-TBR .....	78
Εικόνα 8.6: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 4η είσοδο με την LRCF ADI-TBR .....	78
Εικόνα 8.7: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 1η είσοδο με την EKSM-TBR .....	79
Εικόνα 8.8: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 2η είσοδο με την EKSM-TBR .....	79
Εικόνα 8.9: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 3η είσοδο με την EKSM-TBR .....	80
Εικόνα 8.10: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 4η είσοδο με την EKSM-TBR .....	80
Εικόνα 8.11: Χρήση CPU (σε sec) παραγωγής αρχικού μοντέλου συστήματος .....	81
Εικόνα 8.12: Χρήση CPU (σε sec) παραγωγής μειωμένου μοντέλου συστήματος μέσω της LRCF ADI-TBR .....	82
Εικόνα 8.13: Χρήση CPU (σε sec) παραγωγής μειωμένου μοντέλου συστήματος μέσω της EKSM-TBR .....	82

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 8.1: Χαρακτηριστικά του συστήματος μας .....	71
Πίνακας 8.2: Ενδεικτικό Benchmark μικρής διάστασης πίνακα .....	72
Πίνακας 8.3: Σημαντικά στοιχεία του μειωμένου συστήματος σε σχέση με το αρχικό .....	81



## Κατάλογος Συντομογραφιών

MOR:	Model Order Reduction
TBR:	Truncated Balanced Realization
LRCF-ADI:	Low Rank Cholesky Factorized Alternating Directions Implicit
EKSM:	Extended Krylov Subspace Method
CAD:	Computer Aided Design
ROM:	Reduced Order Model
SVD:	Singular value decomposition
SISO:	Simple InputSimple Output
MIMO:	Multiple Input Multiple Output
LTI:	Linear Time Invariant
MNA:	Modified Nodal Analysis
KCL:	Kirchhoff Current Law
KVL:	Kirchhoff Voltage Law
SPD:	Symmetric Positive Definite
CPU:	Central Processing Unit

# Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1: Συνοπτική παρουσίαση μεθόδων MOR .....	37
---	----

## Περίληψη

**Σ**τον σημερινό επιστημονικό και τεχνολογικό κόσμο, οι φυσικές και τεχνητές διαδικασίες περιγράφονται πολύ συχνά από μαθηματικά μοντέλα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για προσομοίωση ,βελτιστοποίηση ή έλεγχο. Τα μαθηματικά μοντέλα προκειμένου να δώσουν ακριβή αποτελέσματα γίνονται ολοένα και πιο λεπτομερή αυξάνοντας αρκετά την διάσταση τους. Τέτοια μοντέλα μεγάλης κλίμακας οδηγούν σε μεγάλες απαιτήσεις μνήμης και πολυπλοκότητα υπολογισμών. Για να χειριστούμε αποτελεσματικά αυτά τα μεγάλα μοντέλα για προσομοίωση ,βελτιστοποίηση ή έλεγχο ,είναι απαραίτητη η διαδικασία ελαχιστοποίησης τάξης μοντέλου MOR. Η θεμελιώδης ιδέα αυτής της κατηγορίας μεθόδων είναι να προσεγγίσουν ένα μοντέλο μεγάλης κλίμακας με ένα μειωμένο μοντέλο χαμηλότερης που έχει την ίδια (όσο το δυνατόν μεγαλύτερη) συμπεριφορά εισόδου- εξόδου με το αρχικό σύστημα ώστε να γίνεται ευκολότερη και κυρίως γρηγορότερη η προσομοίωση του .

Στην παρούσα εργασία για να επιτύχουμε το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο TBR, η οποία ενώ εφαρμόζονταν μόνο σε προβλήματα μέτριου μεγέθους, πρόσφατα έχει προσαρμοστεί σε πραγματικά μεγάλης κλίμακας προβλήματα. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου έναντι των υπολοίπων είναι ότι το νέο μοντέλο συστήματος που παράγει θα είναι μεν μικρότερης διάστασης από το αρχικό αλλά συγχρόνως θα διατηρεί τις αρχικές του ιδιότητες όπως την παθητικότητα, την ευστάθεια και θα παρέχει υπολογίσιμα όρια σφάλματος. Για να υλοποιήσουμε ωστόσο την μέθοδο TBR θα χρησιμοποιήσουμε δύο άλλες εξίσου σημαντικές μεθόδους της κατηγορίας MOR, για τον υπολογισμό των διπλών εξισώσεων Lyapunov του μεγάλου συστήματος. Καθώς η αριθμητική λύση των εξισώσεων αυτών αποτελεί το πιο ακριβό βήμα του αλγορίθμου επιλέξαμε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους προβολής LRCF-ADI και EKSM ,δίνοντας μια καλή προσέγγιση μέσω παραγόντων λύσης χαμηλού επιπέδου.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Περιγραφή του προβλήματος

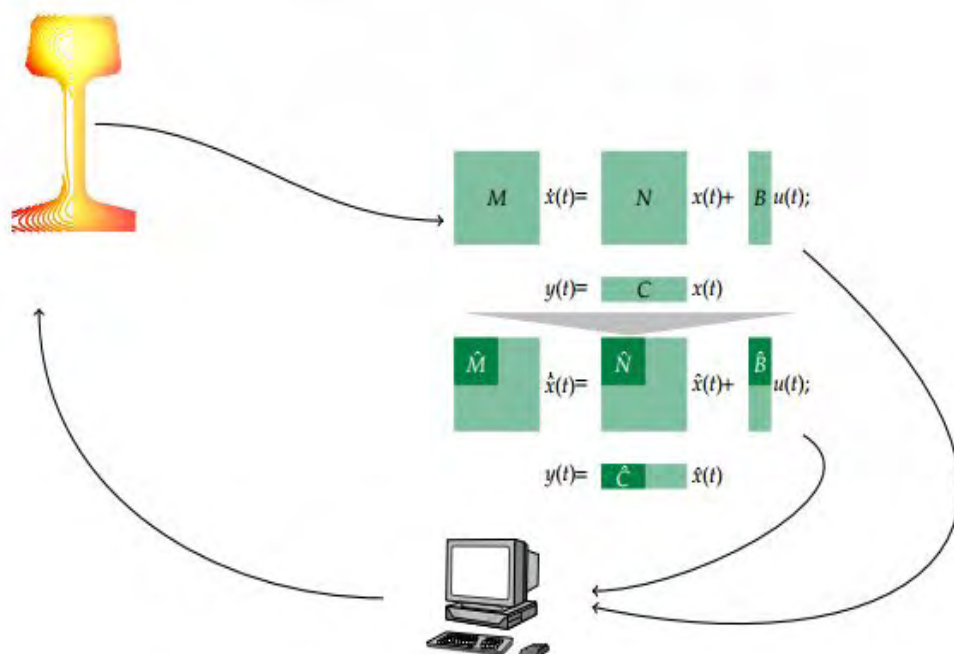
Η μαθηματική μοντελοποίηση και η προσομοίωση έχουν καταστεί σημαντικό μέρος του σημερινού επιστημονικού και τεχνολογικού κόσμου. Για διάφορους σκοπούς, όπως ο έλεγχος, η ανάλυση, η βελτιστοποίηση και ο σχεδιασμός των φυσικών συστημάτων, η προσομοίωση των μαθηματικών μοντέλων διαδραματίζει βασικό ρόλο. Αποτελεί μια διαδεδομένη τεχνική μελέτης και ανάλυσης της συμπεριφοράς πολύπλοκων συστημάτων, υιοθετώντας έναν έμμεσο τρόπο μελέτης. Αντί να μελετήσουμε το σύστημα που μας ενδιαφέρει απευθείας, δημιουργούμε ένα εικονικό μοντέλο του συστήματος αυτού, συνήθως σε ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή και στην συνέχεια το χρησιμοποιούμε προκειμένου να μελετήσουμε, αναλύσουμε ή/και να πειραματιστούμε με το σύστημα. Με αυτό τον τρόπο ελέγχουμε και επαληθεύουμε τον σχεδιασμό των κυκλωμάτων πριν την ανάπτυξη τους, ώστε να αποφεύγουμε την δαπανηρή κατασκευή εκείνων που δεν θα είχαν την συμπεριφορά την οποία θα αναμέναμε.

Ωστόσο όταν ένα φυσικό μοντέλο μετατρέπεται σε μαθηματικό μοντέλο, σε πολλές περιπτώσεις, για να προσομοιωθεί με ακρίβεια, η διάσταση του γίνεται εξαιρετικά μεγάλη. Τέτοια μεγάλα συστήματα προκύπτουν σε διάφορους κλάδους, όπως η χημική μηχανική, τα μηχανικά και μικροηλεκτρο-μηχανικά συστήματα, η υπολογιστική βιολογία, η αεροδιαστημική μηχανική κτλπ. Προκειμένου να επιλυθούν προβλήματα μηχανικής που αφορούν αυτά τα συστήματα μεγάλης κλίμακας, χρειάζονται εξαιρετικά δαπανηρές υπολογιστικές προσπάθειες. Μερικές φορές η προσομοίωση, η δυναμική ανάλυση και ο σχεδιασμός των συστημάτων υψηλότερης τάξης είναι αδύνατη εξαιτίας των περιορισμών που οφείλονται στην μνήμη του υπολογιστή ή στους εφαρμοσμένους αριθμητικούς αλγορίθμους. Για να παρακάμψουμε τα προβλήματα μεγέθους, μια καλή ιδέα είναι να μειώσουμε την διάσταση των μαθηματικών μοντέλων, ώστε η προσομοίωση των κυκλωμάτων να γίνεται μέσα σε πραγματικούς χρόνους. Ο τρόπος με τον οποίο ένα μοντέλο μεγάλων διαστάσεων μειώνεται σε ένα μικρότερο ονομάζεται μείωση τάξης μοντέλου (MOR).

## 1.2 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να χρησιμοποιήσουμε μία τεχνική της κατηγορίας μείωσης τάξης μοντέλου (MOR) προκειμένου να προσεγγίσει ένα μοντέλο μεγάλης κλίμακας από ένα άλλο νέο μοντέλο χαμηλότερης (Εικόνα 1.1), διατηρώντας συγχρόνως σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο βαθμό την συμπεριφορά εισόδου- εξόδου του αρχικού. Πέρα δηλαδή από την μείωση διάστασης του αρχικού μοντέλου που μας ανατέθηκε έχουμε κληθεί να ικανοποιούμε συγχρόνως τις παρακάτω εξίσου σημαντικές προτάσεις που αφορούν την παραγωγή του νέου μειωμένου μοντέλου.

- Το μέγεθος του μειωμένου μοντέλου θα πρέπει να είναι αρκετά μικρό .
- Το νέο μοντέλο θα πρέπει να δημιουργείται αυτόματα (δηλ. ο αλγόριθμος να μην απαιτεί γνώση σχετικά με την φύση του υποκείμενου συστήματος).
- Η έξοδος του συστήματος μεγάλης κλίμακας θα πρέπει να προσεγγίζεται από το νέο μοντέλο το οποίο μπορεί να αξιολογηθεί σημαντικά πιο γρήγορα.
- Οι φυσικές ιδιότητες του αρχικού συστήματος όπως η σταθερότητα, η ελάχιστη φάση, και/ή παθητικότητα θα πρέπει να διατηρούνται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας της ελαχιστοποίησης.
- Τέλος θα πρέπει να υπάρχει ένα υπολογίσιμο όριο σφάλματος/εκτίμηση για το μειωμένο μοντέλο.



Εικόνα 1.1: Ο σκοπός της παρούσας εργασίας

Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών μοντέλων, διάφορες τεχνικές όπως η προσέγγιση optimal Hankel norm, η singular perturbation, η moment matching, η balanced truncation χρησιμοποιούνται συνήθως για την μείωση τάξης μοντέλου. Μεταξύ αυτών των τεχνικών η balanced truncation είναι μια από τις αποδεκτές μεθόδους για μεγάλα αραιά γραμμικά, χρονικά μεταβλητά (LTI) συστήματα. Ένα από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου προβολής είναι ότι διατηρεί την σταθερότητα των αρχικών συστημάτων, δηλαδή αν το αρχικό σύστημα είναι σταθερό τότε το μειωμένης τάξης μοντέλο θα είναι επίσης σταθερό. Επιπλέον έχει ένα καθολικό όριο σφάλματος και διαλέγοντας εκ των προτέρων μία ανοχή σφάλματος, μπορεί να προσαρμοστεί η διάσταση των μειωμένων μοντέλων.

Πιο συγκεκριμένα η κύρια ιδέα αυτής της μεθόδου είναι να διαγράψουμε τις περιττές καταστάσεις, οι οποίες μπορούν να ανιχνευθούν αν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπημένες συντεταγμένες. Η τεχνική της εξισορρόπησης συνδέεται στενά με την λύση των Lyapunov εξισώσεων. Με την λύση δηλαδή των διπλών Lyapunov εξισώσεων υπολογίζουμε τους γραμμικούς πίνακες ελεγκσιμότητας και παρατηρησιμότητας του αρχικού γραμμικού συστήματος από το οποίο μπορούν να εξαχθούν πληροφορίες σχετικά με τις κυρίαρχες καταστάσεις που διατηρούνται στο μοντέλο μειωμένης τάξης (ROM). Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον όταν το νέο μοντέλο πρέπει να διαθέτει ένα υπολογισμένο εκ των προτέρων όριο σφάλματος. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για συστήματα μικρού έως μεσαίου μεγέθους. Εκεί η πυκνή αποθήκευση του συστήματος είναι δυνατή αλλά και ο υπολογισμός των δύο γραμμικών πινάκων του συστήματος είναι επίσης εφικτός χρησιμοποιώντας κλασσικές άμεσες μεθόδους με πολυπλοκότητα  $O(n^3)$ .

Για τα μεγάλα και τα πολύ μεγάλα συστήματα που μπορούν να αποθηκευτούν μόνο σε αραιά ή αραιά μορφότυπα δεδομένων, οι Gramians συνήθως προσεγγίζονται με χαμηλή κλίμακα ή με αραιές αναπαραστάσεις δεδομένων. Στην συγκεκριμένη εργασία επικεντρωνόμαστε στην αραιή περίπτωση και συνεπώς στις χαμηλού βαθμού αναπαραστάσεις των Gramians. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι στην βιβλιογραφία για τον υπολογισμό των χαμηλής τάξεως Gramians ως παραγοντοποιήσεις των λύσεων ελεγκσιμότητας και παρατηρησιμότητας των Lyapunov εξισώσεων. Εμείς διαλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε για τον σκοπό αυτό τις μεθόδους LRCF-ADI και EKSM, τις οποίες και περιγράφουμε εκτενέστερα σε επόμενο κεφάλαιο.

### 1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται κάποιοι βασικοί ορισμοί πάνω στον τομέα της Θεωρίας Ελέγχου και της Γραμμικής Άλγεβρας ώστε να μπορέσει ο αναγνώστης να κατανοήσει ευκολότερα τα μαθηματικά εργαλεία που χρειαζόμαστε για την διεκπεραίωση της εργασίας.

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται μια εκτενής εισαγωγή στις μεθόδους ελαχιστοποίησης τάξης μοντέλου (MOR), παρουσιάζοντας τον γενικό ορισμό των αλγορίθμων, τον κοινό τους στόχο, καθώς και τις βασικές κατηγορίες στις οποίες χωρίζονται.

Στο κεφάλαιο 4 μελετάμε τα χαρακτηριστικά της μεθόδου TBR, δίνοντας αρχικά τον ορισμό και στην συνέχεια τα βήματα της υλοποίησης της. Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στην ολοκλήρωση των αρχικών βημάτων του αλγορίθμου χρησιμοποιώντας δυο σημαντικές τεχνικές της θεωρίας ελέγχου.

Στα κεφάλαια 5,6 γίνεται λεπτομερής αναφορά στους αλγορίθμους LRCF-ADI και EKSM, τόσο ως προς την επεξήγηση τους όσο και ως προς την υλοποίησή τους.

Στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζουμε το τρόπο με τον οποίο γίνεται μια τυπική προσομοίωση κυκλώματος, καθώς και το πως στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος TBR για να απλοποιήσει το αποτέλεσμα.

Στο Κεφάλαιο 8 μετά και την περιγραφή της προσομοίωσης, γίνεται αναφορά στα αποτελέσματα που δίνει ο αλγόριθμος TBR χρησιμοποιώντας διάφορα πειράματα πάνω στο σύστημά μας και καταγράφοντας συγχρόνως τη συμπεριφορά του κάθε στοιχείου.

Στο κεφάλαιο 9 αναφέρουμε τη συνολική εικόνα που αποκομίσαμε εργαζόμενοι κατά τη διάρκεια όλης της έρευνας πάνω στο θέμα αυτό και προτείνονται κάποιες ενδεχόμενες προεκτάσεις που θα μπορούσαν να μελετηθούν στο μέλλον.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Μαθηματικό υπόβαθρο

**Η** διεκπεραίωση αυτής της εργασίας προϋποθέτει την κατανόηση ορισμένων

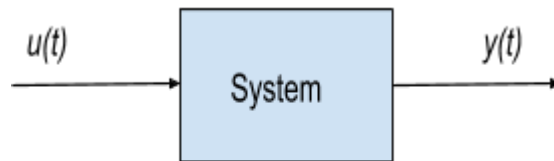
θεωρημάτων στο τομέα της Θεωρίας Ελέγχου και της Γραμμικής Άλγεβρας, τα οποία αποτελούν μαθηματικό υπόβαθρο για την υλοποίηση των μεθόδων που μας ανατέθηκαν. Αρχικά παρουσιάζουμε κάποιες βασικές έννοιες από την θεωρία συστημάτων και ελέγχου, δίνοντας έμφαση στις αναπαραστάσεις του συστήματος από διαφορετικές οπτικές γωνίες, τις ταξινομήσεις, την δυνατότητα ελέγχου και παρατηρησιμότητας τους και τις συναρτήσεις μεταφοράς. Το δεύτερο τμήμα περιέχει μερικούς σημαντικούς ορισμούς και προτάσεις από την Γραμμική Άλγεβρα και την θεωρία πινάκων.

### 2.1 Κατηγορίες συστημάτων

Ένα σύστημα συνήθως αλλάζει καθώς λειτουργεί με τη πάροδο του χρόνου  $t$  όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 2.1), όπου ένα σύστημα λαμβάνει μία εξωτερική είσοδο  $u(t)$  εξαρτώμενη από το χρόνο και παράγει αντίστοιχα την έξοδο  $y(t)$ . Με βάση τη σχέση μεταξύ  $u(t)$  και  $y(t)$ , υπάρχουν 2 τύποι συστημάτων [1], που ονομάζονται στατικά συστήματα και δυναμικά συστήματα. Για ευκολία δηλώνουμε την είσοδο και την έξοδο ως

$$\begin{aligned} u(t) &= [u_1(t) \ u_2(t) \dots u_m(t)]^T \in R^m \\ y(t) &= [y_1(t) \ y_2(t) \dots y_p(t)]^T \in R^p, \end{aligned}$$

όπου η είσοδος περιέχει  $m$  μεταβλητές εισόδου  $u_i(t)$   $i = 1, 2, \dots, m$  και η έξοδος περιέχει  $p$  μεταβλητές εξόδου  $y_j(t)$   $j = 1, 2, \dots, p$ .



Σχήμα 2.1: Σχέση εισόδου -εξόδου συστήματος

### 2.1.1 Στατικά συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται στατικό αν η έξοδος  $y(t)$  εξαρτάται μόνο από την είσοδο  $u(t)$  στη χρονική στιγμή  $t$ , το οποίο και περιγράφεται μαθηματικά ως εξής:

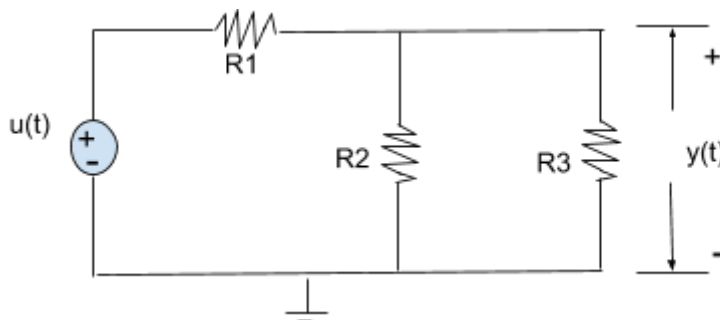
$$y(t) = h(u(t)) = h(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

όπου  $h(u(t)) \in R^p$  είναι μια αλγεβρική συνάρτηση των μεταβλητών εισόδου  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ .

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα στατικό σύστημα όπου η έξοδος του είναι η τάση κατά μήκος της αντίστασης  $R_3$  (Σχήμα 2.2), τότε σύμφωνα με τη θεωρία της ανάλυσης κυκλωμάτων έχουμε

$$y(t) = h(u(t)) = \left( \frac{R_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \right) u(t) = k u(t)$$

όπου  $h(u(t))$  είναι συνάρτηση ανάλογη προς την παρούσα είσοδο  $u(t)$  και το σταθερό κέρδος είναι  $k = \frac{R_2 R_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$ . Σαφώς, η έξοδος μπορεί απλά να προσδιοριστεί από την παρούσα είσοδο  $u(t)$ , γι αυτό και είναι στατικό σύστημα. Στη πραγματικότητα ένα στατικό σύστημα αναφέρεται επίσης ως ένα σύστημα χωρίς μνήμη καθώς η απόκριση εξόδου του  $y(t)$  δεν επηρεάζεται από το παρελθόν της εισόδου  $u(\tau)$  όπου  $\tau < t$ .



Σχήμα 2.2 : Κύκλωμα αντίστασης που διεγείρεται από μία τάση εισόδου  $u(t)$

### 2.1.2 Δυναμικά συστήματα

Σε αντίθεση με ένα στατικό σύστημα η έξοδος  $y(t)$  ενός δυναμικού συστήματος επηρεάζεται από την είσοδο  $u(\tau)$  για  $\tau \leq t$ , δηλαδή όχι μόνο από την είσοδο  $u(t)$  στη παρούσα στιγμή αλλά και των παρελθοντικών  $u(\tau)$  για  $\tau < t$ . Μαθηματικά, ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να εκφραστεί από το λεγόμενο χώρο κατάστασης το οποίο περιγράφει ένα σύστημα με την εξίσωση κατάστασης και την εξίσωση εξόδου. Η εξίσωση κατάστασης δίνεται συχνά ως διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

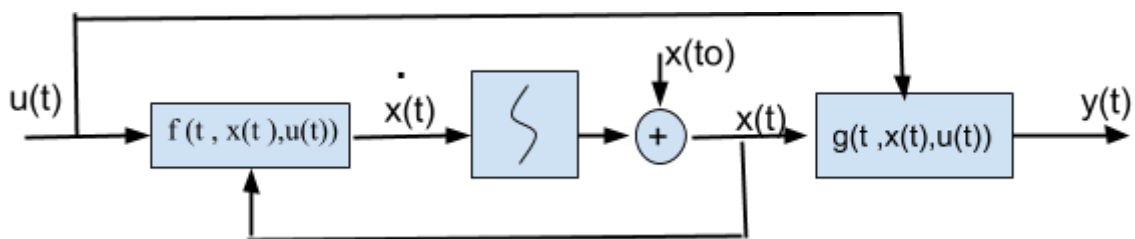
και η εξίσωση εξόδου είναι της μορφής

$$y(t) = g(t, x(t), u(t))$$

όπου  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in R^n$  ονομάζεται κατάσταση συστήματος και αποτελείται από  $n$  μεταβλητές κατάστασης  $x_i(t)$   $i = 1, 2, \dots, n$  και  $x(t_0) = x_0$  είναι η κατάσταση του συστήματος στην αρχική στιγμή  $t = t_0$  όπου συνήθως ονομάζεται αρχική κατάσταση. Να σημειωθεί ότι η κατάσταση του συστήματος αντιπροσωπεύει τα εγγενή χαρακτηριστικά του συστήματος. Όσο για την εξίσωση εξόδου μπορεί να αλλάξει περαιτέρω στην ακόλουθη μορφή

$$y(t) = h(t, u(t)),$$

λόγω του γεγονότος ότι η κατάσταση του συστήματος  $x(t)$  μπορεί να λυθεί ως συνάρτηση της εισόδου  $U(t)$ .



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα κυκλωμάτων δυναμικού συστήματος που εκφράζεται σε περιγραφή κατάστασης -χώρου

### 2.1.3 Γραμμικά Χρονικά αμετάβλητα συστήματα

Τα πιο σημαντικά δυναμικά συστήματα στη μηχανική ονομάζονται γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα ή συστήματα *LTI* συνοπτικά. Η δυναμική συμπεριφορά τους εκφράζεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

όπου όλοι οι πίνακες του συστήματος  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $D \in R^{p \times m}$  είναι σταθεροί. Είναι γνωστό ότι η κατάσταση του συστήματος  $x(t)$  προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από την παρακάτω εξίσωση

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

αν η αρχική κατάσταση  $x(t_0)$  και η είσοδος  $u(\tau)$  για  $t \leq \tau \leq t_0$  δίνονται. Η έξοδος στη συνέχεια λαμβάνεται ως:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

Δεδομένου ότι η έξοδος  $y(t)$  περιέχει το ολοκλήρωμα της εισόδου  $u(t)$ , γνωρίζουμε ότι η έξοδος  $y(t)$  επηρεάζεται από την παρούσα εισροή  $u(t)$  και από το σύνολο του παρελθόντος της. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα *LTI* είναι πράγματι ένα δυναμικό σύστημα, όχι ένα στατικό σύστημα.

## 2.2 Χώρος κατάστασης

Στη φυσική, ένας χώρος κατάστασης είναι ένας αφηρημένος χώρος στον οποίο αντιπροσωπεύονται διαφορετικές "θέσεις", όχι κυριολεκτικές θέσεις, αλλά μάλλον καταστάσεις κάποιου φυσικού συστήματος.

### 2.2.1 Ορισμοί Δυναμικών Συστημάτων

- Έννοια της κατάστασης

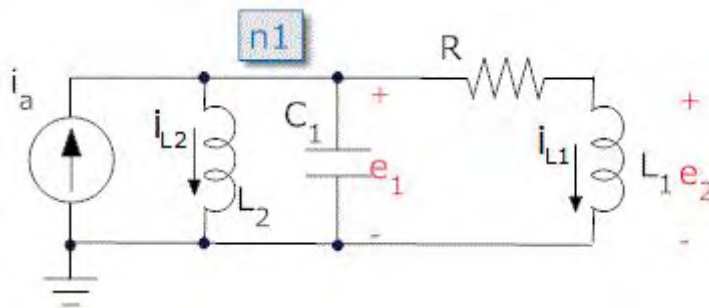
Η κατάσταση ενός συστήματος ανά πάσα χρονική στιγμή  $t_0$  είναι η ελάχιστη ποσότητα πληροφοριών στο  $t_0$ , η οποία μαζί με όλες τις εισόδους για  $t \geq t_0$ , καθορίζει με μοναδικό τρόπο τη συμπεριφορά του συστήματος για όλες τις  $t \geq t_0$ .

- **Μεταβλητές / Διάλυση Κατάστασης**

Μια μεταβλητή κατάσταση [2] είναι ένα από τα σύνολα μεταβλητών που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της μαθηματικής "κατάστασης" ενός δυναμικού συστήματος. Διαισθητικά, η κατάσταση ενός συστήματος περιγράφει αρκετά το σύστημα για να καθορίσει τη μελλοντική συμπεριφορά του, όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που το επηρεάζουν. Τα μοντέλα που αποτελούνται από συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης λέγεται ότι είναι σε μορφή μεταβλητής κατάστασης.

- **Δυναμικές Εξισώσεις**

Η εύρεση της δυναμικής εξίσωσης [3] θα γίνει καλύτερα αντιληπτή μέσω ενός παραδείγματος (Εικόνα 2.4). Σκοπός είναι να αποκτήσουμε ένα μοντέλο κατάστασης για το παρακάτω σύστημα. Η είσοδος είναι  $i_a$  και η έξοδος είναι  $e_2$ .



Εικόνα 2.4 : Παράδειγμα ενδεικτικού κυκλώματος RLC

Υπάρχουν τρία στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας, οπότε αναμένουμε τρεις εξισώσεις κατάστασης. Επιλέξαμε  $i_1, i_2$  και  $e_1$  ως μεταβλητές κατάστασης. Τώρα θέλουμε εξισώσεις για τα παράγωγά τους. Η τάση στο πηνίο  $L_2$  είναι  $e_1$  (η οποία είναι μία από τις μεταβλητές της κατάστασής μας).

$$L_2 (di_{L2} / dt) = e_1$$

Έτσι η πρώτη μας μεταβλητή εξίσωση κατάστασης είναι

$$di_{L2} / dt = (1/L_2) e_1 .$$

Αν αθροίσουμε τα ρεύματα στον κόμβο με την ένδειξη  $n_1$ , έχουμε

$$i_a - i_{L2} - i_{C1} - i_{L1} = 0.$$

Αυτή η εξίσωση έχει τις εισόδους μας ( $i_a$ ), τις δύο μεταβλητές κατάστασης ( $i_{L2}$  και  $i_{L1}$ ) και το ρεύμα μέσω του πυκνωτή. Από αυτό μπορούμε να πάρουμε τη δεύτερη εξίσωση κατάστασης

$$\begin{aligned} i_{C1} &= C_1(d e_1 / dt) = i_a - i_{L2} - i_{L1} \\ (d e_1 / dt) &= (1/C_1) (i_a - i_{L2} - i_{L1}). \end{aligned}$$

Η τρίτη και η τελική εξίσωση κατάστασης που παίρνουμε, γράφοντας μια εξίσωση για την τάση σε όλη την  $L_1$  (η οποία είναι  $e_2$ ) από την άποψη των άλλων μας μεταβλητών κατάστασης είναι

$$\begin{aligned} e_2 &= L_1(d i_{L1} / dt) = e_1 - R i_{L1} \\ (d i_{L1} / dt) &= (1 / L_1) (e_1 - R i_{L1}). \end{aligned}$$

Τέλος χρειαζόμαστε μια εξίσωση εξόδου

$$e_2 = e_1 - R i_{L1}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η αναπαράσταση της κατάστασης γίνεται

$$x = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{L2} \\ e_1 \\ i_{L1} \end{bmatrix}$$

$$x' = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

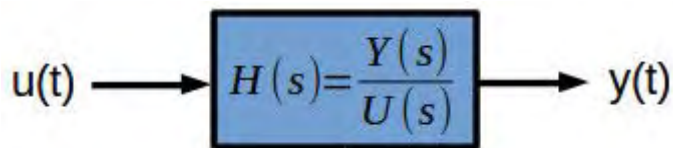
$$y = Cx + Du$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -R \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Το παραπάνω παράδειγμα, το οποίο μας βοηθάει να κατανοήσουμε τον τρόπο δημιουργίας των εξισώσεων κατάστασης για γραμμικά συστήματα, για λόγους ευκολότερης κατανόησης, αναφερόταν σε ένα σύστημα το οποίο είχε σαν διέγερση μια είσοδο και έβγαζε σαν αποτέλεσμα μια έξοδο (SISO). Εμείς, στην παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε κυρίως με συστήματα πολλαπλού αριθμού εισόδων όσο και εξόδων (MIMO).

### 2.2.2 Εύρεση Συνάρτησης Μεταφοράς από Δυναμικές Εξισώσεις

Η συνάρτηση μεταφοράς ορίζει τη σχέση μεταξύ της εξόδου και της εισόδου ενός δυναμικού συστήματος, γραμμένο σε σύνθετη μορφή ( $s$  μεταβλητή). Για ένα δυναμικό σύστημα με είσοδο  $u(t)$  και έξοδο  $y(t)$ , η συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$  είναι ο λόγος μεταξύ της αναπαράστασης των εξόδων  $Y(s)$  και της εισόδου  $U(s)$ .



Εικόνα 2.5: Εύρεση συνάρτηση Μεταφοράς  $H(s)$

Ας θεωρήσουμε το σύστημα [4]

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

από το οποίο παίρνουμε το Μετασχηματισμό Laplace (με μηδενικές αρχικές συνθήκες):

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Θέλουμε να λύσουμε ως προς το λόγο  $Y(s)$  με το  $U(s)$ , οπότε πρέπει να αφαιρέσουμε το  $Q(s)$  από την εξίσωση εξόδου. Ξεκινάμε με την επίλυση της εξίσωσης κατάστασης ως προς  $Q(s)$

$$\begin{aligned} sX(s) - AX(s) &= BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) = \Phi(s)BU(s) \end{aligned}$$

όπου  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$

Τον πίνακα  $\Phi(s)$  που ονομάζεται και πίνακας της μεταβατικής κατάστασης τον βάζουμε στην εξίσωση εξόδου και προκύπτει το παρακάτω

$$\begin{aligned} Y(s) &= C \Phi(s) B U(s) + D U(s) \\ &= (C \Phi(s) B + D) U(s). \end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να λύσουμε ως προς τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = Y(s)/U(s) = C \Phi(s) B + D = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Να επισημάνουμε ότι τα συστήματα που έχουν βαθμό αριθμητή στην συνάρτηση μεταφοράς μεγαλύτερο από τον βαθμό του παρανομαστή δεν έχουν λύση διότι δε μπορούν να περιγραφούν από τις δυναμικές εξισώσεις στο χώρο κατάστασης.

### 2.2.3 Ευστάθεια, Παθητικότητα ΓΧΑ Συστημάτων

Κατά την ανάλυση ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου, η ευστάθεια αποτελεί έναν κρίσιμο παράγοντα. Γενικά, ως ευσταθές χαρακτηρίζεται ένα σύστημα που παρουσιάζει πεπερασμένη απόκριση. Δηλαδή, αν κάποιο σύστημα διεγερθεί από ένα φραγμένο σήμα εισόδου και η απόκρισή του εμφανίζει πεπερασμένο πλάτος, τότε το σύστημα αυτό χαρακτηρίζεται ως ευσταθές. Θα μπορούσαμε λοιπόν να ορίσουμε την ευστάθεια των ΓΧΑ συστημάτων ελέγχου και ως την ιδιότητα που παρουσιάζει το σύστημα όταν διεγείρεται από φραγμένη είσοδο, να έχει φραγμένη έξοδο. Συνήθως για τη μελέτη των ΓΧΑ συστημάτων ελέγχου χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση μεταφοράς τους που είναι μια σχέση εισόδου – εξόδου και μέσω αυτής θα μελετήσουμε την ευστάθεια. Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές θα πρέπει ο βαθμός του αριθμητή να είναι μικρότερος ή ίσος από τον βαθμό του παρανομαστή και έτσι η συνάρτηση μεταφοράς αναλύεται σε άθροισμα μερικών απλών κλασμάτων.



Με τον όρο «παθητικότητα» εννοούμε την ιδιότητα ενός συστήματος να μην αποθηκεύει περισσότερη ενέργεια από αυτή που του παρέχεται από τις εξωτερικές εισόδους. Ένα παθητικό σύστημα, μπορεί να είναι είτε ένα σύστημα που καταναλώνει (αλλά δεν παράγει) ενέργεια, είτε ένα σύστημα που είναι ανίκανο να κερδίσει ενέργεια (αυξητική παθητικότητα). Πιο απλά ένα σύστημα της μορφής,

$$\begin{aligned}x' &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

λέγεται παθητικό εάν υπάρχει συνάρτηση  $S(x)$  με  $S(x) \geq 0$ , για την οποία ισχύει

$$(d/dt) S \leq y^T u.$$

Η συνάρτηση  $S$ , μιλώντας για φυσικές συνθήκες είναι συχνά η “αποθηκευμένη ενέργεια” στο σύστημα, ενώ  $y^T u$  είναι η παρεχόμενη ενέργεια. Η  $S(x)$  είναι η λειτουργία αποθήκευσης και η  $s(y, u) = y^T u$  είναι ο ρυθμός παροχής. Τέλος η ανισότητα  $(d/dt) S \leq y^T u$  είναι ισοδύναμη με  $((\partial^T S / \partial x)(x)) [f(x) + g(x)u] \leq h^T(x) u$ .

Ως εκ τούτου, η παθητικότητα μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση της έννοιας της συνάρτησης Lyapunov.

## 2.2.4 Μηδενικά και Πόλοι

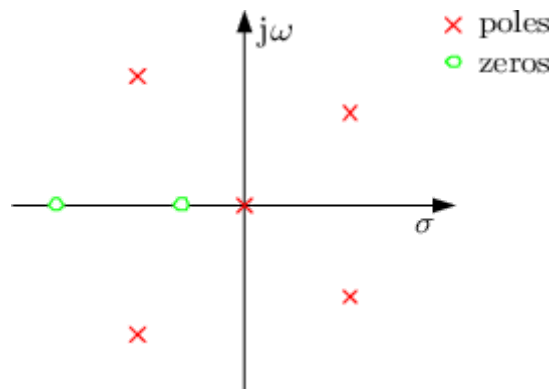
Οι πόλοι και τα μηδενικά [5] μιας συνάρτησης μεταφοράς είναι οι συχνότητες για τις οποίες η τιμή του παρονομαστή και του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς είναι μηδέν αντίστοιχα. Οι τιμές των πόλων και τα μηδενικά του συστήματος καθορίζουν αν το σύστημα είναι σταθερό και πόσο καλά εκτελείται. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου ευσταθές, πρέπει όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Δηλαδή, θα πρέπει οι πόλοι του συστήματος να βρίσκονται στο αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Μάλιστα, όσο πιο μακριά από τον φανταστικό άξονα βρίσκονται οι πόλοι, τόσο πιο γρήγορα η κρουστική απόκριση αποσβένεται και συνεπώς το σύστημα ηρεμεί πιο γρήγορα μετά την εισαγωγή κάποιας διαταραχής.

Τα συστήματα ελέγχου, με την απλούστερη έννοια, μπορούν να σχεδιαστούν απλά αναθέτοντας συγκεκριμένες τιμές στους πόλους και τα μηδενικά του συστήματος. Τα συστήματα ελέγχου πρέπει να έχουν έναν αριθμό πόλων μεγαλύτερο ή ίσο με τον αριθμό των μηδενικών. Συστήματα που ικανοποιούν αυτή τη σχέση ονομάζονται Ορθά.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση μεταφοράς που ορίζεται ως αναλογία δύο πολυωνύμων:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

,όπου  $N(s)$  και  $D(s)$  είναι απλά πολυώνυμα.



Εικόνα 2.6: Γεωμετρικός τόπος των ριζών

Τα μηδενικά είναι οι ρίζες του  $N(s)$  (ο αριθμητής της συνάρτησης μεταφοράς) που λαμβάνεται με τη ρύθμιση του  $N(s) = 0$  και την επίλυση του  $s$ . Οι πόλοι είναι οι ρίζες του  $D(s)$  (ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς), που λαμβάνεται με τη ρύθμιση του  $D(s) = 0$  και την επίλυση του  $s$ . Λόγω του περιορισμού μας παραπάνω, ότι μια συνάρτηση μεταφοράς δεν πρέπει να έχει περισσότερα μηδενικά από τους πόλους, μπορούμε να δηλώσουμε ότι η πολυωνυμική σειρά των  $D(s)$  πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση με την πολυωνυμική σειρά των  $N(s)$ .

## 2.3 Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα

Η Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα [6],[7] είναι δύο βασικές έννοιες της σύγχρονης θεωρίας των συστημάτων ελέγχου, οι οποίες εισήχθησαν από τον R.Kalman το 1960.

- Ελεγχιμότητα ονομάζεται η ικανότητα της εισόδου  $u(t)$  ενός συστήματος να επηρεάζει όλες τις μεταβλητές εσωτερικής του κατάστασης  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται ελέγξιμο. Αντίστοιχα η κατάσταση  $x(t)$  ενός συστήματος λέγεται πλήρως ελέγξιμη, όταν υπάρχει συνάρτηση εισόδου

$u(t)$  ικανή να πραγματοποιήσει την μετάβαση από μια αρχική κατάσταση  $x_0(t)$  στην τρέχουσα κατάσταση  $x(t)$ .

- Παρατηρησιμότητα ονομάζεται η ικανότητα όλων των μεταβλητών εσωτερικής κατάστασης  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  ενός συστήματος να επηρεάζουν την έξοδο  $y(t)$ . Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται παρατηρήσιμο. Αντίστοιχα η κατάσταση  $x(t)$  ενός συστήματος λέγεται πλήρως παρατηρήσιμη, όταν για δεδομένη είσοδο  $u(t)$  είναι δυνατός ο καθορισμός κάθε κατάστασης  $x(t)$  του συστήματος μόνο από μετρήσεις στην έξοδο  $y(t)$ .

### 2.3.1 Πίνακες Ελεγχιμότητας και Παρατηρησιμότητας

Για γραμμικά χρονικά αμετάβλητα συστήματα (LTI), ένα σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο όταν ο πίνακας ελεγχιμότητας (διάστασης  $n \times n$ )

$$P = [B \ AB \ A^2B \ \dots A^{n-1}B]$$

έχει βαθμό  $n$ , δηλαδή ορίζουσα  $\det P \neq 0$ .

Από την άλλη ένα σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο όταν ο πίνακας παρατηρησιμότητας (διάστασης  $n \times n$ )

$$Q = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T$$

έχει βαθμό  $n$ , δηλαδή ορίζουσα  $\det Q \neq 0$

### 2.3.2 Γραμμιανοί πίνακες

Οι Gramians είναι περίπλοκες μαθηματικές λειτουργίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθορίσουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά για ένα σύστημα. Για παράδειγμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε Gramians για να καθορίσουμε αν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο ή παρατηρήσιμο. Επειδή ωστόσο είναι πιο περίπλοκες από άλλες μεθόδους, χρησιμοποιούνται συνήθως μόνο όταν οι άλλες μέθοδοι ανάλυσης αποτυγχάνουν (ή είναι πολύ δύσκολες).

#### Controllability Gramian

Μπορούμε να ορίσουμε τον γραμμικό πίνακα ελεγχιμότητας ενός συστήματος (A,B) ως

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-t)} B B^T e^{A^T(t_0-t)} dt .$$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο αν ο βαθμός του γραμμικού πίνακα ελεγκσιμότητας είναι ίδιος με τον βαθμό του συστήματος.

$$\text{rank}(W_c) = n$$

### Observability Gramian

Μπορούμε να ορίσουμε τον γραμμικό πίνακα παρατηρησιμότητας ενός συστήματος (A,B) ως

$$W_o(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T(t_0-t)} C^T C e^{A(t_0-t)} dt .$$

Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο στο διάστημα  $t_0 < t < t_1$  αν ο βαθμός του γραμμικού πίνακα είναι ίδιος με τον βαθμό του συστήματος.

$$\text{rank}(W_o) = n$$

Να επισημάνουμε ότι για τα αμετάβλητα συστήματα οι Gramians ελεγκσιμότητας και παρατηρησιμότητας μπορούν να βρεθούν λύνοντας τις παρακάτω εξισώσεις Lyapunov.

$$\begin{aligned} A W_c + W_c A^T &= - B B^T \\ A^T W_o + W_o A &= - C^T C . \end{aligned}$$

## **2.4 Μοντελοποίηση ηλεκτρικών κυκλωμάτων**

Η αριθμητική προσομοίωση [8] των ηλεκτρονικών δικτύων είναι στενά συνδεδεμένη με την μοντελοποίηση του δικτύου. Μια πολύ καλή προσέγγιση είναι η περιγραφή του δικτύου από ένα γράφημα με κλάδους και κόμβους, όπου ο κάθε κλάδος αντιπροσωπεύει ένα ηλεκτρικό στοιχείο και οι ακροδέκτες του συνδέονται μεταξύ τους στους κόμβους. Τα στοιχεία του δικτύου περιγράφονται πλήρως από μια σχέση μεταξύ ενός ρεύματος διακλάδωσης και της αντίστοιχης τάσης κλάδου (πχ αντιστάσεις, πυκνωτές, επαγωγείς, ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος). Οι περιγραφόμενες σχέσεις ρεύματος- τάσης ονομάζονται χαρακτηριστικές εξισώσεις του δικτύου.

### 2.4.1 Βασικές έννοιες ηλεκτρικών κυκλωμάτων

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι μια διαδρομή στην οποία τα ηλεκτρόνια προέρχονται από μια ροή πηγής τάσης ή ρεύματος. Το σημείο όπου τα ηλεκτρόνια αυτά εισέρχονται στο ηλεκτρικό κύκλωμα ονομάζεται “πηγή” ηλεκτρονίων ενώ το σημείο όπου τα ηλεκτρόνια φεύγουν από το κύκλωμα ονομάζεται “γείωση”. Το σημείο εξόδου ονομάζεται “επιστροφή” επειδή τα ηλεκτρόνια καταλήγουν πάντα στην πηγή όταν ολοκληρώνουν την διαδρομή ενός ηλεκτρικού κυκλώματος.

Στα ηλεκτρικά κυκλώματα διακρίνουμε τα εξής μέρη:

- Κόμβος: Σημείο στο οποίο συντρέχουν περισσότεροι από δύο αγωγοί. Συνήθως επισημαίνονται με γράμματα ως σημεία αναφοράς για τη μελέτη του κυκλώματος.
- Κλάδος: Μέρος ενός κυκλώματος μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων.
- Βρόχος: Μέρος ενός κυκλώματος που απαρτίζεται από διαδοχικούς κλάδους σχηματίζοντας μία ακριβώς κλειστή διαδρομή.

Συνήθως σε κάθε κύκλωμα χρειάζεται να υπολογίζουμε σε κάθε συσκευή την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που τη διαρρέει, την τάση που εφαρμόζεται στα άκρα της, την ισχύ που μεταφέρεται στη συσκευή και άλλα. Για τον υπολογισμό όλων αυτών των πληροφοριών σε ένα κύκλωμα χρησιμοποιούμε συνήθως τους νόμους του Ohm και τους κανόνες του Kirchhoff γνωρίζοντας την αντίσταση των συσκευών (και των αγωγών, αν δεν είναι αμελητέα) και την ηλεκτρεγερτική δύναμη της πηγής ή των πηγών.

### 2.4.2 Βασικά κυκλωματικά στοιχεία

Τα κυκλωματικά στοιχεία χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το αν μπορούν να παρέχουν ενέργεια σε ένα κύκλωμα ή όχι.

#### Παθητικά στοιχεία

Παθητικά στοιχεία ονομάζουμε τα στοιχεία τα οποία δεν μπορούν να παρέχουν ενέργεια σε ένα κύκλωμα, αλλά μπορούν είτε να την μετατρέψουν σε μια άλλη μορφή (για παράδειγμα θερμική, μηχανική ή άλλης μορφής) ή να την αποθηκεύσουν σε ένα ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο. Ένα παθητικό στοιχείο είναι ένα στοιχείο με την ιδιότητα ότι η τάση κατά μήκος αυτού  $v(t)$  και το ρεύμα μέσω αυτού  $i(t)$ , μπορεί να σχετίζονται μέσω μιας σχέσης της μορφής

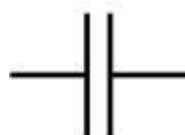
$$u=f(i,i') \quad \text{ή} \quad i=f(v,v')$$

όπου  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $i'(t)$ ,  $v'(t)$  είναι τα παράγωγα πρώτης τάξης των  $i(t), v(t)$  αντίστοιχα. Η σχέση αυτή ονομάζεται εξίσωση στοιχείου. Όταν η εξίσωση στοιχείου δεν εξαρτάται από το παράγωγο, έτσι ώστε  $i=f(v)$  ή  $v=f(i)$ , τότε το στοιχείο λέγεται ότι είναι αντιστατικό, αλλιώς είναι δυναμικό. Στην μοντελοποίηση ενός δικτύου διακρίνονται 3 διαφορετικοί τύποι παθητικών στοιχείων, οι αντιστάσεις, οι πυκνωτές και οι επαγωγείς, των οποίων οι χαρακτηριστικές εξισώσεις περιγράφονται ως εξής

1. Αντιστάτης(Resistor): περιορίζεται ή αλλιώς αντιστέκεται στην ροή του ηλεκτρικού ρεύματος ακολουθώντας τον Νόμο  $v = Ri$ , όπου  $R$  είναι η τιμή της αντίστασης. Η σχέση αυτή μπορεί κάποιες φορές να γραφτεί κι ως  $i = Gv$ , όπου  $G = 1/R$  ονομάζεται αγωγιμότητα.



2. Πυκνωτής (Capacitor): αποθηκεύει ενέργεια σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο ακολουθώντας τον Νόμο  $q = Cv$ , όπου  $q$  είναι το ηλεκτρικό φορτίο και  $C$  είναι η τιμή χωρητικότητας. Τα χαρακτηριστικά τάσης-ρεύματος δίνονται από την σχέση  $i = dq/dt = C dv/dt$  (η χωρητικότητα είναι σταθερή).



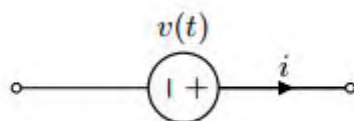
3. Επαγωγέας(Inductor): αποθηκεύει ενέργεια σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ακολουθώντας τον Νόμο  $\Phi = Li$ , όπου  $\Phi$  είναι η μαγνητική ροή, το  $L$  είναι η τιμή της αυτεπαγωγής. Το χαρακτηριστικό τάσης-ρεύματος δίνεται από την σχέση  $u=d\Phi/dt= L di/dt$  (η επαγωγή είναι σταθερή).



## Ενεργά στοιχεία

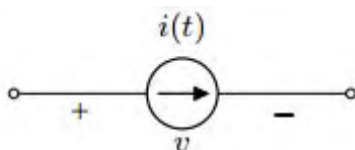
Ενεργά στοιχεία ονομάζουμε τα στοιχεία τα οποία μπορούν να παρέχουν ενέργεια στο κύκλωμα. Για λόγους απλότητας, στην συγκεκριμένη εργασία οι ανεξάρτητες πηγές θα είναι τα μόνο ενεργά στοιχεία που θεωρούμε.

- Πηγή τάσης(Voltage source) : είναι ένα κυκλωματικό στοιχείο το οποίο παράγει ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα μέσω της τάσης (διαφοράς δυναμικού). Η ανεξάρτητη πηγή τάσης έχει διαφορά δυναμικού στα άκρα της ανεξάρτητη από το ρεύμα που την διαρρέει. Το χαρακτηριστικό ρεύμα- τάσης δίνεται από την σχέση  $v = E$ , όπου  $E$  η δύναμη της πηγής.



Να σημειώσουμε ωστόσο ότι το  $v$  δεν εξαρτάται από το ρεύμα κλάδου  $i$ .

- Πηγή ρεύματος(Current source) :είναι ένα κυκλωματικό στοιχείο το οποίο παράγει ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα μέσω του ρεύματος. Η ανεξάρτητη πηγή ρεύματος προσφέρει ρεύμα στο κύκλωμα, του οποίου η ένταση είναι ανεξάρτητη από την τάση στα άκρα της πηγής. Το χαρακτηριστικό ρεύμα-τάσης δίνεται από την σχέση  $i = I$ , όπου  $I$  η δύναμη της πηγής.



Να σημειώσουμε επίσης ότι το  $i$  δεν εξαρτάται από την τάση του κλάδου  $v$ .

Τέλος για όλα τα κυκλωματικά στοιχεία ακολουθούμε την συζευγμένη φορά τάσης ρεύματος: το ρεύμα να οδηγείται από τον ακροδέκτη με το υψηλότερο δυναμικό (+) προς τον ακροδέκτη με το χαμηλότερο δυναμικό (-). Η συζευγμένη φορά αναφοράς ρεύματος και τάσης κάθε κλάδου ενός κυκλώματος επιλέγονται πριν από την ανάλυση του κυκλώματος. Εάν το πραγματικό ρεύμα που θα προκύψει μετά την ανάλυση είναι θετικό, τότε η φορά του ρεύματος είναι αυτή που επιλέχθηκε αρχικά. Εάν το πραγματικό ρεύμα προκύψει αρνητικό, τότε η φορά του ρεύματος είναι αντίθετη από αυτή που επιλέχθηκε αρχικά. Το ίδιο ισχύει και για την τάση.

### 2.4.3 Νόμοι του Kirchhoff

Η ηλεκτρική συμπεριφορά ενός κυκλώματος περιγράφεται πλήρως από τους νόμους του Kirchhoff. Οι νόμοι του Kirchhoff ισχύουν γενικά για κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα, δεν εξαρτώνται από τη φύση των ηλεκτρικών στοιχείων που συνθέτουν το κύκλωμα, παρά μόνο από την τοπολογία (γεωμετρική μορφή, δομή) του κυκλώματος. Οι νόμοι

είναι δύο, ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff (*KCL*) και ο νόμος τάσεων του Kirchhoff(*KVL*).

1. Ο νόμος των ρευμάτων του Kirchhoff περιγράφει την αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου, σύμφωνα με την οποία το ηλεκτρικό φορτίο ούτε καταστρέφεται, ούτε δημιουργείται εκ του μηδενός, αλλά διατηρείται σταθερό σε κάθε κλειστό σύστημα. Συνέπεια της αρχής αυτής είναι η αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου σε έναν κόμβο. Μπορούμε να περιγράψουμε τον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff (*KCL*) ως

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

δηλαδή, το άθροισμα όλων των ρευμάτων του κλάδου που εισέρχονται σε έναν κόμβο ισούται με το μηδέν, λαμβάνοντας υπόψη έναν κόμβο με ρεύματα διακλάδωσης  $i_1, \dots, i_n$  που θα εισέλθουν σε αυτόν τον κόμβο.

2. Από την άλλη μπορούμε να διατυπώσουμε το νόμο τάσης του Kirchhoff (*KVL*) ως

$$\sum_{k=1}^n v_k(t) = 0$$

δηλαδή το άθροισμα όλων των τάσεων των επιμέρους κλάδων σε έναν βρόχο ισούται με το μηδέν, αν σκεφτούμε ένα βρόχο με τάσεις διακλάδωσης  $V_1, \dots, V_n$ .

#### 2.4.4 Πίνακας πρόσπτωσης - Γενίκευση νόμων Kirchhoff

Σε ένα κύκλωμα όπου υπάρχουν πολλοί κόμβοι και βρόγχοι, πρέπει να γραφτούν οι νόμοι *KCL* και *KVL* για κάθε έναν από αυτούς για να περιγραφεί η τοπολογία του κυκλώματος. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι χρειάζεται ένας συστηματικός τρόπος για να αντλήσουμε όλες αυτές τις εξισώσεις για το κύκλωμα που μας δίνεται.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα γράφο  $G = (V, E)$  (όπου  $|V| = n$  το σύνολο των κόμβων του και  $|E| = m$  το σύνολο των κλάδων του). Σε κάθε γράφο  $G$  αντιστοιχεί ένας πίνακας πρόσπτωσης (incidence matrix). Ο πίνακας πρόσπτωσης είναι ένας πίνακας διάστασης  $|V| \times |E|$  εφόσον οι γραμμές του αριθμούνται με βάση τους κόμβους και οι στήλες με βάση τους κλάδους του γράφου. Τα στοιχεία του ελαττωμένου πίνακα πρόσπτωσης  $A$  ορίζονται από την σχέση

$$A_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{εαν ο κλάδος } j \text{ εξέρχεται από τον κόμβο } i \\ -1, & \text{εαν ο κλάδος } j \text{ εισέρχεται στον κόμβο } i \\ 0, & \text{εαν ο κλάδος } j \text{ δε συνδέεται με τον κόμβο } i \end{cases}$$



Για να εκφράσουμε τους νόμους του Kirchhoff κάνουμε χρήση του παραπάνω πίνακα πρόσπτωσης, έτσι ώστε να προκύψουν οι διανυσματικές εξισώσεις που χρειαζόμαστε. Θεωρούμε λοιπόν ένα κύκλωμα με  $V = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  το σύνολο των κόμβων, όπου 0 είναι ο κόμβος αναφοράς (συνήθως ο κόμβος της γείωσης) και  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  το σύνολο των κλάδων του κυκλώματος.

Ο νόμος ρευμάτων του Kirchhoff (KCL) περιγράφεται από την εξίσωση:

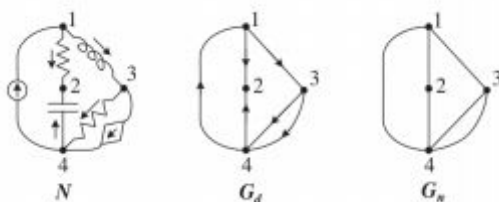
$$Ai(t) = 0,$$

η οποία εκφράζει ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε κόμβο είναι ίσο με το μηδέν. Αντίστοιχα ο νόμος τάσεων του Kirchhoff (KVL) περιγράφεται από την εξίσωση:

$$u(t) = A^T v(t),$$

η οποία εκφράζει ότι η τάση σε κάθε κλάδο είναι ίση με την διαφορά δυναμικού των κόμβων του κλάδου.

Ακολουθεί ένα απλό παράδειγμα που δείχνει πως δημιουργείται ο ελαττούμενος πίνακας πρόσπτωσης μέσα από ένα κύκλωμα.

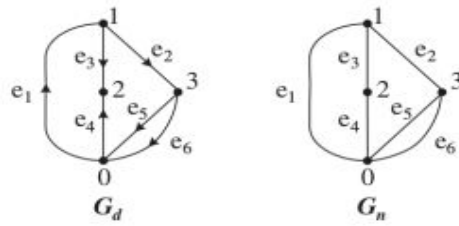


Εικόνα 2.7: Ενδεικτικό παράδειγμα: αρχικό κύκλωμα

Ο πίνακας πρόσπτωσης του κυκλώματος ως προς την γείωση είναι:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Στο σχήμα (Εικόνα 2.8) φαίνεται ένα ενδεικτικό κύκλωμα με μικρό αριθμό στοιχείων, όπου με βάση τις διαδικασίες που περιγράψαμε φτάσαμε στο τελικό γράφο του σχήματος (Εικόνα 2.9).



Εικόνα 2.8 : Ενδεικτικό παράδειγμα: πορεία προς τον τελικό γράφο

Από τον KVL έχουμε:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

και από τον KCL αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2.4.5 Τροποποιημένη ανάλυση κόμβων

Η τροποποιημένη ανάλυση κόμβων (MNA) υπολογίζει τις τάσεις των κόμβων και το ρεύμα ορισμένων κλάδων του κυκλώματος. Τα  $m$  στοιχεία του κυκλώματος χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1. Τα στοιχεία της κατηγορίας 1 είναι στοιχεία των οποίων οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$i_k(t) = g_k u_k(t) + c_k \left( \frac{du_k(t)}{dt} \right) + s_k(t)$$

Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται αντιστάσεις, χωρητικότητες και πηγές ρεύματος.

2. Στοιχεία των οποίων οι εξισώσεις δεν μπορούν να γραφούν στην παραπάνω μορφή αποτελούν τα στοιχεία αυτής της κατηγορίας. Περιλαμβάνονται πηγές τάσης και πηνία.

Υποθέτοντας ότι  $m_1$  είναι τα στοιχεία της κατηγορίας 1 και  $m_2$  είναι τα στοιχεία της κατηγορίας 2 χωρίζουμε τον ελαττωμένο πίνακα πρόσπτωσης  $A$  και τα διανύσματα  $u(t)$  και  $i(t)$  σε υπό- πίνακες και υπό- διανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στις δύο κατηγορίες των στοιχείων ως εξής

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

όπου οι υπό- πίνακες έχουν τις εξής διαστάσεις:

$$A_1 \rightarrow (n-1) \times m_1$$

$$A_2 \rightarrow (n-1) \times m_2$$

$$u_1 \rightarrow m_1 \times 1$$

$$u_2 \rightarrow m_2 \times 1$$

$$i_1 \rightarrow m_1 \times 1$$

$$i_2 \rightarrow m_2 \times 1$$

Από τον KCL όπως είδαμε και παραπάνω ισχύει:

$$A i(t) = 0 \Leftrightarrow A_1 i_1(t) + A_2 i_2(t) \quad (2.1)$$

και από τον KVL:

$$u(t) = A^T V(t) \Leftrightarrow u_1(t) = A_1^T V(t)$$

$$u_2(t) = A_2^T V(t) \quad (2.2)$$

καθώς

$$A^T = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} A_1^T &\rightarrow m_1 \times (n-1) \\ A_2^T &\rightarrow m_2 \times (n-1) \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις των στοιχείων της κατηγορίας 1 γράφονται υπό τη μορφή πίνακα:

$$i_1(t) = Gu_1(t) + C \frac{du_1(t)}{dt} + S_1(t) \quad (2.3)$$

όπου:

$G$ : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης  $m_1 \times m_1$  με μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις των αντιστάσεων και μηδενικά στις θέσεις των πυκνωτών και των πηγών ρεύματος.

$C$ : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης  $m_1 \times m_1$  με μη-μηδενικά στοιχεία στην θέση των πυκνωτών και μηδενικά στις θέσεις των αντιστατών και των πηγών ρεύματος.

$S_1$ : είναι ένα διάνυσμα διάστασης  $m_1 \times 1$  με μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις των πηγών ρεύματος και μηδενικά στις θέσεις των πυκνωτών και των αντιστατών.

$i_k = g_k u_k(t)$ : όταν ο  $k$ -κλάδος φέρει αντίσταση.

$i_m = C_m \frac{du_m(t)}{dt}$ : όταν ο  $m$ -κλάδος φέρει πυκνωτή.

Οι εξισώσεις των στοιχείων της κατηγορίας 2 γράφονται υπό την εξής μορφή πίνακα:

$$u_2(t) = L \frac{di_2}{dt} + S_2(t) \quad (2.4)$$

όπου:

$L$ : είναι ένας διαγώνιος πίνακας διάστασης  $m_2 \times m_2$  με μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις των πηνίων και μηδενικά στις θέσεις των πηγών τάσης.

$S_2$ : είναι ένα διάνυσμα διάστασης  $m_2 \times 1$  με μη-μηδενικά στοιχεία στις θέσεις των πηγών τάσης και μηδενικά στις θέσεις των πηνίων.

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση της (2.2) στη (2.3) και κατόπιν το αποτέλεσμα αυτής στην εξίσωση (2.1) έχουμε την εξής σχέση:

$$A_1 G A_1^T V(t) + A_1 C A_1^T V'(t) + A_2 i_2(t) = -A_1 S_1(t) \quad (2.5)$$

Επίσης, αντικαθιστώντας τη δεύτερη σχέση της (2.2) στην (2.4) προκύπτει

$$A_2^T V(t) - L \frac{D i(t)}{dt} = S_2(t) \quad (2.6)$$

Ο συνδυασμός των δύο παραπάνω εξισώσεων δίνει ένα σύστημα διαστάσεων:

$$[(n-1) + m_2] \times [(n-1) + m_2]$$

το οποίο το γράφουμε σε έναν εκτεταμένο πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ -A_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 C A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'(t) \\ i_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 S_1(t) \\ S_2 \end{bmatrix}$$

και περιγράφει την MNA ανάλυση του συστήματος.

## 2.4.6 Συσχετισμός των MNA εξισώσεων με τις δυναμικές εξισώσεις

Έστω οι MNA εξισώσεις

$$\begin{aligned} Gx + C x' &= B u_{in}(t) \\ u_{out}(t) &= L^T x \end{aligned} \quad (2.8)$$

$x(t)$ : είναι το διάνυσμα κατάστασης με μέγεθος  $n$

$u_{in}(t)$ : αποτελεί το διάνυσμα των εισόδων με μέγεθος  $N_i$

$u_{out}(t)$ : είναι το διάνυσμα των εξόδων μεγέθους  $N_o$ , όσος δηλαδή και ο αριθμός των εξόδων

$C, G$ : αποτελούν τετραγωνικούς  $n \times n$  πίνακες, οι οποίοι προκύπτουν από τα στοιχεία και την τοπολογία του κυκλώματος

$B$ : είναι ο πίνακας  $n \times N_i$ , που αντιστοιχίζει το διάνυσμα των εισόδων

$u_{in}(t)$  στο διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης  $x(t)$

$L$ : είναι ο πίνακας  $n \times N_o$  που αντιστοιχίζει το διάνυσμα των εξόδων  $u_{out}(t)$  στο διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης  $x(t)$

Σε παραπάνω ενότητα δείξαμε τον υπολογισμό της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος, κάνοντας χρήση των μετασχηματισμών Laplace. Πράττοντας όμοια και στις εξισώσεις της (2.8) έχουμε την εξής συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = L^T (G + sC)^{-1} B$$

Θα αποδείξουμε λοιπόν πως οι παραπάνω MNA εξισώσεις, είναι όμοιες με τις δυναμικές. Υποθέτουμε πως ο πίνακας C είναι αντιστρέψιμος και πολλαπλασιάζοντας με αυτόν προκύπτει:

$$\begin{aligned} Gx + Cx' &= Bu_{in}(t) \Rightarrow \\ C^{-1}Gx + C^{-1}Cx' &= C^{-1}Bu_{in}(t) \Rightarrow \\ x' &= -C^{-1}Gx + C^{-1}Bu_{in}(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Θέτοντας,

$$\begin{aligned} A &= -C^{-1}G \\ b &= C^{-1}B \end{aligned} \quad (2.10)$$

και κάνοντας αντικατάσταση της σχέσης (2.10) στη σχέση (2.9) έχουμε

$$x' = Ax + bu_{in}$$

Ισχύει ότι η έξοδος είναι ίδια με πριν, απλά διαφέρει ο συμβολισμός, το L δηλαδή είναι c

$$V_{out}(t) = L^T x(t)$$

οι οποίες αποτελούν την καταστατική εξίσωση και την εξίσωση εξόδου αντίστοιχα στη μορφή που δείξαμε παραπάνω. Έτσι λοιπόν φτάνουμε και στη συνάρτηση μεταφοράς όπως αποδείξαμε σε προηγούμενη ενότητα, δηλαδή στην εξίσωση:

$$H(s) = C^T (sI - A)^{-1} b.$$

Η συμπεριφορά κάθε port μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$YV = I$$

ή

$$ZI = V$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_N \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $Y$  περιέχει αγωγιμότητες, ο  $V$  τάσεις και ο  $I$  ρεύματα. Στον πίνακα  $Y$  οι μόνες πηγές που επιτρέπονται στο κύκλωμα, είναι οι πηγές τάσης κατά μήκος των ports. Έτσι λοιπόν είναι αναγκαίες κάποιες αντικαταστάσεις στις MNA εξισώσεις, δηλαδή το  $u_{in}(t)$  μετατρέπεται σε  $u_p(t)$  που είναι το διάνυσμα των τάσεων στα ports και το  $u_{out}(t)$  σε  $i_p(t)$  που είναι το διάνυσμα των ρευμάτων. Οι έξοδοι μπορούν να υπολογισθούν από τις εισόδους και αποδεικνύεται ότι  $B = -L$  Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} Gx + C x' &= Bu_p(t) \\ i_p(t) &= -B^T x \end{aligned}$$

ο πίνακας αντιμετάθεσης είναι

$$Y(s) = -B^T (G + sC)^{-1} B$$

Για να βρούμε τον πίνακα  $Z$  έχουμε

$$Gx + C x' = Bu_p(t)$$

$$i_p(t) = B^T x$$

έτσι λοιπόν,

$$Z(s) = B^T (G + sC)^{-1} B$$

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε ένα παράδειγμα ώστε να γίνει πιο κατανοητή η διαδικασία. Έστω το παρακάτω κύκλωμα, δημιουργούμε τους πίνακες  $G$ ,  $C$  και  $B$ , ενώ το διάνυσμα κατάστασης είναι





## Εύρεση ιδιοτιμής

1. Αρχικά λύνουμε την εξίσωση  $\det(A - \lambda I)$  δηλαδή αφαιρούμε το  $\lambda$  από την κύρια διαγώνιο και λύνουμε την

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}-\lambda & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Η συνάρτηση  $|A - \lambda I|$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$  και καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα (αν ο  $A - \lambda I$  είναι αντιστρέψιμος τότε εύκολα συνεπάγεται ότι  $u = 0$ ).

2. Στην συνέχεια για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  ξεχωριστά λύνουμε το ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda I)X = 0$$

για να βρούμε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο. Ουσιαστικά βρίσκουμε μια βάση από ιδιοδιανύσματα.

## 2.5.2 Μετασχηματισμοί ομοιότητας πινάκων

Έστω ότι  $T \in R^{n \times n}$  είναι ένας αντιστρέψιμος, τετραγωνικός πίνακας διάστασης  $n$ . Λέμε ότι δύο πίνακες  $A, B$  είναι όμοιοι αν υπάρχει μετασχηματισμός ομοιότητας που να σχετίζει τον ένα πίνακα με τον άλλο. Δηλαδή αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $T \in R^{n \times n}$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $B = T^{-1}AT$ . Η απεικόνιση  $T^{-1}AT$  ονομάζεται μετασχηματισμός ομοιότητας του πίνακα  $A$  και ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} [T^{-1}AT] &= [T^{-1}] [A] [T] \\ [T^{-1}AT] &= [1/T] [A] [T] \\ [T^{-1}AT] &= [A] \end{aligned}$$

## 2.5.3 Διανυσματικοί χώροι

- Ορισμός διανυσματικού χώρου

Είναι χώροι [9] που έχουν ως στοιχεία τους διανύσματα (σύνολα διανυσμάτων). Ο πιο οικείος είναι ο  $R^3$ , δηλαδή ο τρισδιάστατος ευκλείδειος χώρος, καθώς και ο  $R^2$ , δηλαδή το επίπεδο.

- **Βάση διανυσματικού χώρου**

Λέγεται κάθε πεπερασμένο σύνολο [9] γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του χώρου τέτοιο ώστε κάθε διάνυσμα του χώρου να μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης.

- **Ορθοκανονικές βάσεις**

Αν τα διανύσματα της βάσης [9] εκτός από γραμμικά ανεξάρτητα είναι επιπλέον και ορθογώνια, η βάση [λέγεται ορθογώνια. Αν είναι ορθοκανονικά (ορθογώνια ανά δύο, με μέτρο μονάδα, δηλ.  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ ) η βάση λέγεται ορθοκανονική. Οι ορθοκανονικές βάσεις αποτελούν γενικά την πιο χρήσιμη περίπτωση βάσης διανυσματικών χώρων.

- **Ορθογωνιοποίηση Gram-Schmidt**

Είναι μέθοδος [9] με την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε από ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ένα σύνολο ορθοκανονικών διανυσμάτων.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο σε διανύσματα του γνωστού μας τρισδιάστατου ευκλείδειου χώρου  $R^3$ . Έστω τα τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του  $R^3$ ,  $v_1, v_2, v_3$ . Θα κατασκευάσουμε από αυτά τρία ορθοκανονικά διανύσματα,  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ .

Ξεκινάμε με το  $v_1$ , το οποίο κανονικοποιούμε διαιρώντας το με το μέτρο του, παίρνοντας έτσι το διάνυσμα  $\hat{e}_1 = v_1 / |v_1|$ . Χρησιμοποιώντας το  $v_2$ , κατασκευάζουμε ένα διάνυσμα,  $v_2'$ , κάθετο στο  $v_1$  (και στο  $\hat{e}_1$ ), αφαιρώντας από το  $v_2$  τη συνιστώσα του την παράλληλη στο  $\hat{e}_1$ :  $v_2' = v_2 - \lambda \hat{e}_1$ . Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο  $\hat{e}_1 \cdot v_2' = 0$ , προκύπτει  $\lambda = \hat{e}_1 \cdot v_2$ . Άρα,  $v_2' = v_2 - (\hat{e}_1 \cdot v_2) \hat{e}_1$  και  $\hat{e}_2 = v_2' / |v_2'|$ . Συνεχίζοντας ανάλογα, κατασκευάζουμε από το  $v_3$  το διάνυσμα  $v_3'$  το οποίο είναι κάθετο στα  $\hat{e}_1$  και  $\hat{e}_2$  αφαιρώντας τις συνιστώσες τού  $v_3$  τις παράλληλες στα  $\hat{e}_1$  και  $\hat{e}_2$ :  $v_3' = v_3 - \lambda \hat{e}_1 - \mu \hat{e}_2$ . Τα  $\lambda$  και  $\mu$  υπολογίζονται από τα εσωτερικά γινόμενα  $\hat{e}_1 \cdot v_3 = 0$  και  $\hat{e}_2 \cdot v_3 = 0$  ( $\lambda = \hat{e}_1 \cdot v_3$ ,  $\mu = \hat{e}_2 \cdot v_3$ ), και το  $\hat{e}_3$  με κανονικοποίηση του  $v_3'$  (δηλ. με διαίρεση με το μέτρο του). Η διαδικασία εφαρμόζεται ανάλογα και σε χώρους περισσότερων διαστάσεων.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

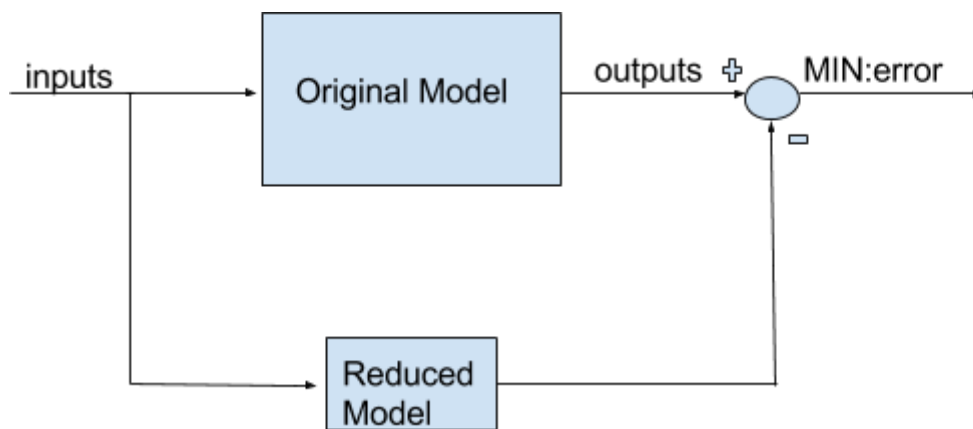
## Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR)

**Ο**ι αλγόριθμοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (Mor) έχουν αποδειχθεί ότι είναι μια πάρα πολύ καλή τεχνική για να επιταχύνουν την προσομοίωση ενός μαθηματικού μοντέλου μιας διεργασίας. Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε αρχικά τον γενικό ορισμό των Mor αλγορίθμων, θα δείξουμε ποιος είναι ο στόχος αυτών, πώς λειτουργούν καθώς και ποιες είναι οι βασικές κατηγορίες στις οποίες χωρίζονται.

### 3.1 Εισαγωγή στους Mor αλγορίθμους

Οι αλγόριθμοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (Mor) είναι μια από τις τεχνικές CAD που επινοήθηκαν για να βελτιώσουν την αποτελεσματικότητα της προσομοίωσης των πολύ μεγάλων συστημάτων. Είναι γνωστό ότι πολλά σύγχρονα μαθηματικά μοντέλα λόγω του μεγάλου μεγέθους κι της πολυπλοκότητας τους δαπανούν μεγάλα ποσοστά χρόνου κι αποθηκευτικού χώρου μέχρι να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος [10]. Η απλούστευση τους λοιπόν είναι απαραίτητη ώστε να αποφεύγονται προβλήματα ιδίως όταν χρησιμοποιούνται σε μοντελοποιήσεις ή σε αριθμητικές προσομοιώσεις.

Κύριος στόχος των συγκεκριμένων αλγορίθμων είναι να βρουν ένα μειωμένης τάξης μοντέλο (ROM) (Εικόνα 3.1) που έχει παρόμοια συμπεριφορά εισόδου-εξόδου με το αρχικό μοντέλο ώστε να είναι ευκολότερα διαχειρίσιμο. Δεδομένου ότι το μειωμένο μοντέλο είναι πολύ μικρότερο από το αρχικό, η ανάλυση του μειωμένου μοντέλου είναι πολύ ευκολότερη από την ανάλυση του αρχικού μοντέλου. Κανονικά το μοντέλο που προκύπτει από την προσομοίωση ενός κυκλώματος είναι τάξης χιλιάδων ως και εκατομμυρίων ενώ ένα ROM μοντέλο είναι συνήθως τάξεως μικρότερο του εκατό. Έτσι λοιπόν οι Mor αλγόριθμοι αποκτούν μεγάλη ζήτηση στον τομέα της προσομοίωσης της VLSI τεχνολογίας.

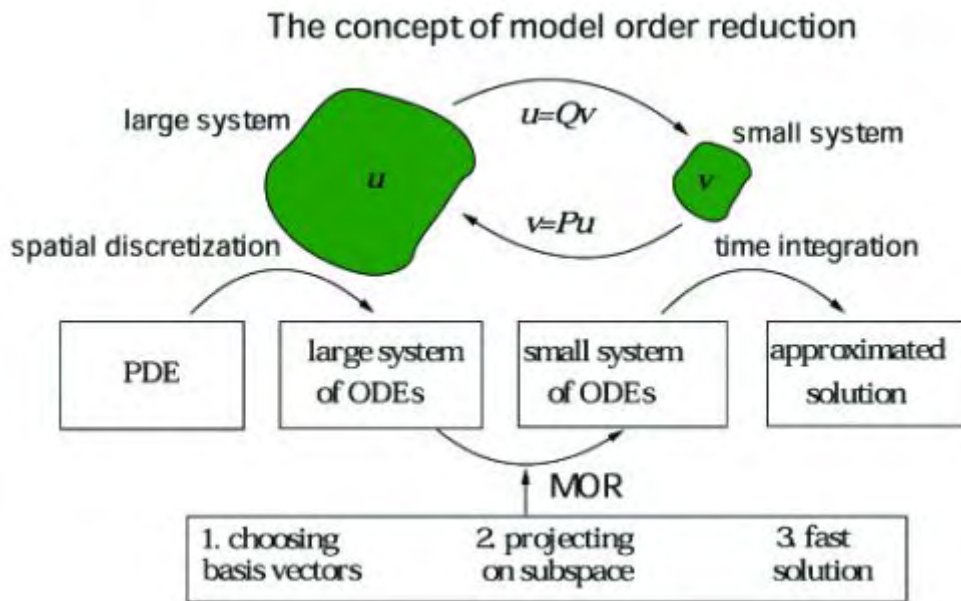


Εικόνα 3.1 : Ελαχιστοποίηση τάξης συστήματος

Είναι απαραίτητο ωστόσο να εξασφαλιστεί ότι το νέο μοντέλο που προκύπτει από τους MOR αλγορίθμους πρέπει να είναι ακριβές κι ταυτόχρονα αποτελεσματικό ώστε να μπορεί να ενσωματωθεί σε μια προσομοίωση. Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση συχνότητας του νέου μοντέλου πρέπει να προσεγγίζει όσο γίνεται περισσότερο την αντίστοιχη απόκριση του αρχικού. Δηλαδή το σφάλμα της προσέγγισης να είναι πολύ μικρό. Επίσης θα πρέπει το μοντέλο να είναι σταθερό για να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα προσομοίωσης σε επίπεδο συστήματος. Ασταθής μοντέλα μπορεί να οδηγήσουν σε ανακριβή ή σε εντελώς ανέφικτη προσομοίωση στο πεδίο του χρόνου.

### 3.2 Η γενική ιδέα των Mor αλγορίθμων

Όλες οι υπάρχουσες μέθοδοι μείωσης τάξης μοντέλων στηρίζονται στη διαδικασία της προβολής. Τι εννοούμε όμως όταν λέμε στηρίζονται στην διαδικασία προβολής? Έστω ότι μας δίνεται ένα δυναμικό σύστημα, η μετακίνηση της κάθε κατάστασης στον χώρο καταστάσεων δημιουργεί ένα μονοπάτι που ονομάζεται τροχιά συστήματος. Κατά την προσομοίωση ενός κυκλώματος, ουσιαστικά θα θέλαμε να γνωρίζουμε την τροχιά της κατάστασης σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα. Έχει βρεθεί ότι η τροχιά δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο χώρο κατάστασης και μπορεί να θεωρηθεί ως μια γεωμετρική δομή που αντιπροσωπεύει την δυναμική συμπεριφορά του κυκλώματος. Οι Projection-based MOR αλγόριθμοι βασίζονται στην ιδέα ότι η τροχιά μπορεί να προβάλλεται σε κάποιον υπόχωρο και στην συνέχεια να ανακτάται προσεγγιστικά στον αρχικό χώρο ( Εικόνα 3.2).



Εικόνα 3.2 : Η γενική ιδέα του Model Order Reduction

Στόχος τους δηλαδή είναι να βρεθεί ένας υπόχωρος  $S_1$  ο οποίος θα προσεγγίζει τον πολλαπλάσιο αρχικό υπόχωρο, στον οποίο βρίσκεται το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$ . Με την σειρά του το διάνυσμα  $x(t)$  θα προσεγγίζεται από τη προβολή του  $\hat{x}(t)$  στον υπόχωρο  $S_1$ . Να τονίσουμε ότι το μειωμένο τάξης μοντέλο θα παραχθεί από τη προβολή Petrov-Galerkin χρησιμοποιώντας ένα δείγμα υποχώρου  $S_2$  ή από τη προβολή Galerkin χρησιμοποιώντας τον  $S_1$  ως δοκιμαστικό υπόχωρο. Αν υποθέσουμε ότι η ορθοκανονική βάση  $V = (u_1, u_2, \dots, u_r)$  του υποχώρου  $S_1$  έχει βρεθεί τότε η προσέγγιση  $\hat{x}(t)$  στον  $S_1$  μπορεί να αναπαρασταθεί από τη βάση ως  $\hat{x}(t) = Vz(t)$ . Επομένως το  $x(t)$  μπορεί να προσεγγιστεί από  $x(t) \approx Vz(t)$ , όπου  $z$  είναι ένα διάνυσμα μήκους  $r$ . Τέλος αφού υπολογιστεί το διάνυσμα  $z(t)$  μπορεί να προκύψει μία προσεγγιστική λύση  $\hat{x}(t) = Vz(t)$  για το  $x(t)$  ακολουθώντας τα δύο παρακάτω βήματα.

**Βήμα 1:** Γίνεται αντικατάσταση του  $x$  στο σύστημα

$$E \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

και προκύπτει το εξής

$$E \frac{dVz}{dt} = AV_z + Bu(t) + e$$

$$\hat{y}(t) = CVz$$

όπου  $e = A V z + B u(t) - E dV z / dt$ .

**Βήμα 2:** Αναγκάζοντας το  $e = 0$  σε ένα σωστά επιλεγμένο υπόχωρο  $S_2$  του  $R^n$  οδηγεί στη Petrov-Galerkin προβολή :

$$W^T e = 0$$

,όπου οι στήλες του  $W$  αποτελούν τη βάση του  $S_2$ . Τότε έχουμε :

$$\begin{aligned} W^T E dV z / dt &= W^T A V z + W^T B u(t) , \\ \hat{y}(t) &= C V z . \end{aligned}$$

Με τον καθορισμό  $\hat{E} = W^T E V$ ,  $\hat{A} = W^T A V$ ,  $\hat{B} = W^T B$ ,  $\hat{C} = C V$ , θα προκύψει το τελικό μειωμένο μοντέλο

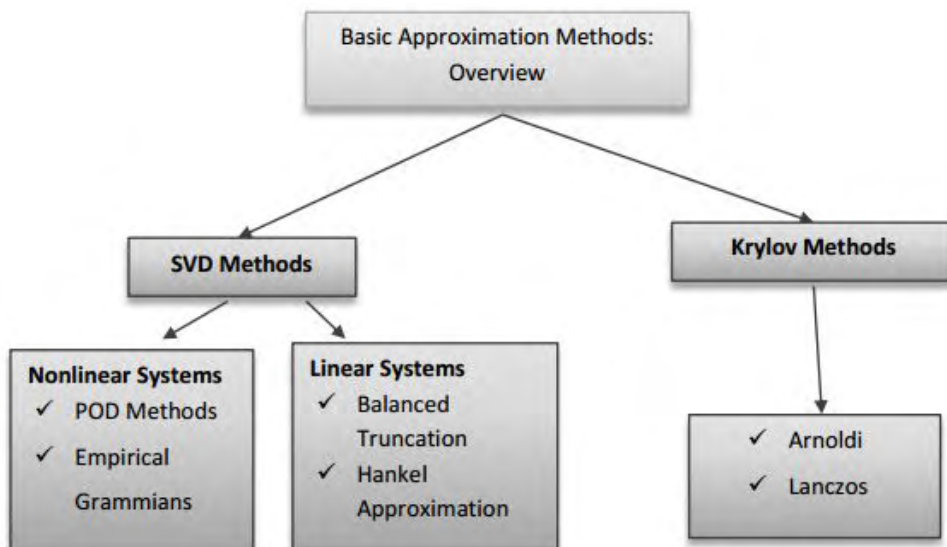
$$\begin{aligned} \hat{E} dV z / dt &= \hat{A} z(t) + \hat{B} u(t) , \\ \hat{y}(t) &= \hat{C} z(t) . \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση  $\hat{x}(t) = V z(t)$  του διανύσματος  $x(t)$  μπορεί να ληφθεί από το  $z(t)$  λύνοντας το παραπάνω τελικό μειωμένο σύστημα. Το σύστημα αυτό είναι πολύ μικρότερο από το αρχικό με την έννοια ότι υπάρχουν πολύ λιγότερες εξισώσεις. Ως εκ τούτου το ελαττωμένο σύστημα είναι πολύ πιο εύκολο να λυθεί και ονομάζεται ελαττωμένο μοντέλο.

### 3.3 Βασικές κατηγορίες μεθόδων MOR

Οι θεμελιώδεις μέθοδοι στον τομέα των MOR αλγορίθμων δημοσιεύτηκαν από αξιόλογους επιστήμονες στην δεκαετία του ογδόντα και του ενενήντα του περασμένου αιώνα. Αρχικά δημοσιεύτηκαν στον τομέα των συστημάτων κι της θεωρίας ελέγχου, οι οποίοι μελετάνε τις ιδιότητες των δυναμικών συστημάτων για την μείωση της πολυπλοκότητας τους, διατηρώντας παράλληλα όσο το δυνατόν περισσότερο την σχέση εισόδου-εξόδου. Σήμερα οι αλγόριθμοι αυτοί έχουν δημοσιευτεί εξίσου κι στον τομέα της αριθμητικής ανάλυσης δίνοντας προσεγγιστικές αλλά ακριβείς λύσεις σε δύσκολα μαθηματικά προβλήματα.

Πιο συγκεκριμένα στο τομέα των MOR αλγορίθμων έχουν σχηματιστεί δύο βασικές κατηγορίες μεθόδων, οι μέθοδοι που βασίζονται στην SVD και οι μέθοδοι που βασίζονται στους Krylov subspaces [11].



Σχήμα 1: Συνοπτική παρουσίαση μεθόδων MOR

Ας ξεκινήσουμε αρχικά με τις βασικές διαφορές των αλγορίθμων που ανήκουν στις δύο αυτές κατηγορίες και έπειτα θα μιλήσουμε μεμονωμένα για την καθεμία σε ξεχωριστή υποενότητα.

Οι μέθοδοι SVD είναι κατάλληλοι κυρίως για μικρής κλίμακας συστήματα και παρέχουν ένα καθορισμένο όριο σφάλματος, διατηρώντας τις ιδιότητες του αρχικού συστήματος όπως παθητικότητα και ευστάθεια. Ωστόσο δεν είναι υπολογιστικά αποδοτικοί με χρονική και χωρική πολυπλοκότητα  $O(n^3)$  και  $O(n^2)$  αντίστοιχα, όπου  $n$  η διάσταση του συστήματος. Στον αντίποδα οι μέθοδοι Krylov είναι κατάλληλοι για συστήματα μεγάλης κλίμακας και είναι υπολογιστικά ανεκτοί με πολυπλοκότητα  $O(r^2n)$  όπου  $n$  ο αριθμός των καταστάσεων. Όμως δεν έχουν κάποιο συγκεκριμένο όριο σφάλματος και δεν συνεχίζουν να διατηρούν τις αρχικές ιδιότητες του συστήματος. Τέλος οι μέθοδοι της πρώτης κατηγορίας υποστηρίζονται από τη Matlab σε αντίθεση με τις μεθόδους της δεύτερης.

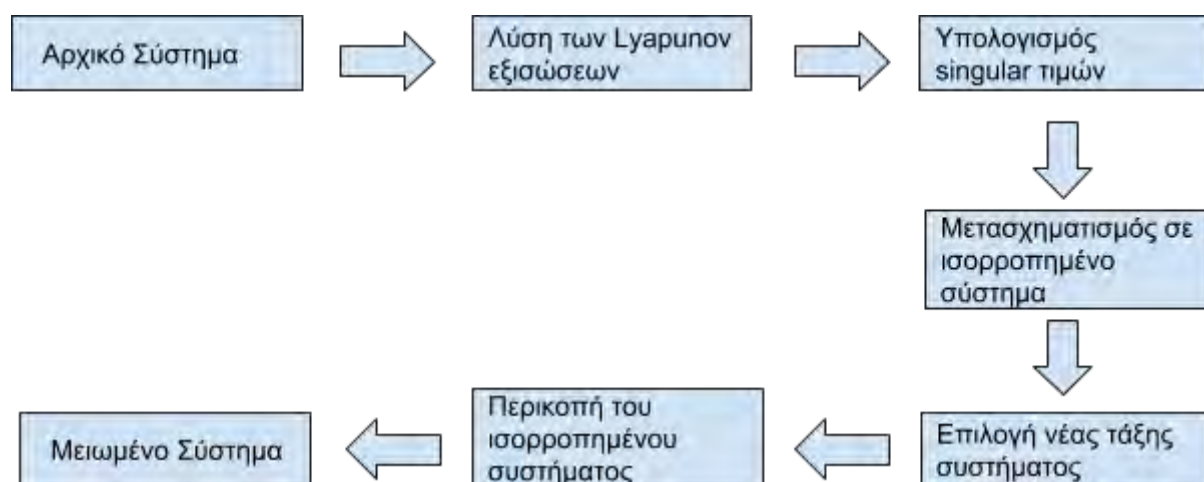
### 3.3.1 Singular value decomposition μέθοδοι

Οι μέθοδοι αυτής της κατηγορίας βασίζονται στην low rank προσέγγιση, η οποία είναι βέλτιστη με την έννοια της 2-norm. Έχουν σαν κύριο στόχο τους να προσεγγίσουν πίνακες μεγάλης κλίμακας χρησιμοποιώντας άλλους πίνακες χαμηλότερης και να παρέχουν ένα υπολογίσιμο όριο σφάλματος μεταξύ του μειωμένου και του αρχικού



συστήματος. Ξεκινάνε με τις Lyapunov εξισώσεις, τις οποίες και λύνουν για να βρουν τους γραμμικούς πίνακες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας (Εικόνα 3.3). Στην συνέχεια παραγοντοποιούν το ζεύγος της λύσης αυτής και κάνουν αποσύνθεση του γινομένου των παραγόντων που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση ώστε να βρεθούν οι ιδιάζουσες τιμές Hankel. Έπειτα μετατρέπουν το σύστημα σε μια ισορροπημένη υλοποίηση χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό ομοιότητας σύμφωνα με τις τιμές που βρέθηκαν στα προηγούμενα βήματα. Αφού ισορροπήσουν το σύστημα επιλέγουν μια νέα μειωμένη τάξη για το σύστημα και ξεκινάνε να διαγράφουν τις καταστάσεις του συστήματος οι οποίες είναι τουλάχιστον μη ελέγξιμες ή μη παρατηρήσιμες ώστε να παράγουν το νέο μοντέλο μειωμένης τάξης. Οι διαθέσιμοι αλγόριθμοι για αυτές τις μεθόδους, ωστόσο, δεν είναι κατάλληλοι για μεγάλης κλίμακας προβλήματα αφού έχουν αναπτυχθεί κυρίως για πυκνούς υπολογισμούς πινάκων. Τέλος παρουσιάζουμε κάποιες σημαντικές μεθόδους της κατηγορίας αυτής με την χρονολογική σειρά που δημοσιεύτηκαν .

Το **1981** δημοσιεύτηκε η πρώτη μέθοδος της SVD κατηγορίας, η Truncated Balanced Realization (TBR) από τον ηλεκτρονικό μηχανικό B.C.Moore ενώ τρία χρόνια αργότερα το **1984** ακολούθησε η μέθοδος Hankel-norm reduction η οποία δημοσιεύτηκε από τον Keith Glover. Κι οι δύο αυτές εφαρμόζονται σε γραμμικά δυναμικά συστήματα. Το **1987** ο μηχανικός Sirovich πρότεινε με την σειρά του άλλη μια μέθοδο την Proper Orthogonal Decomposition (POD) η οποία ανήκει κι αυτή στην ίδια κατηγορία, με την διαφορά ότι αυτή εφαρμόζεται σε μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Ωστόσο και οι τρεις αυτές μέθοδοι αναπτύχθηκαν στον τομέα των συστημάτων κι της θεωρίας ελέγχου.

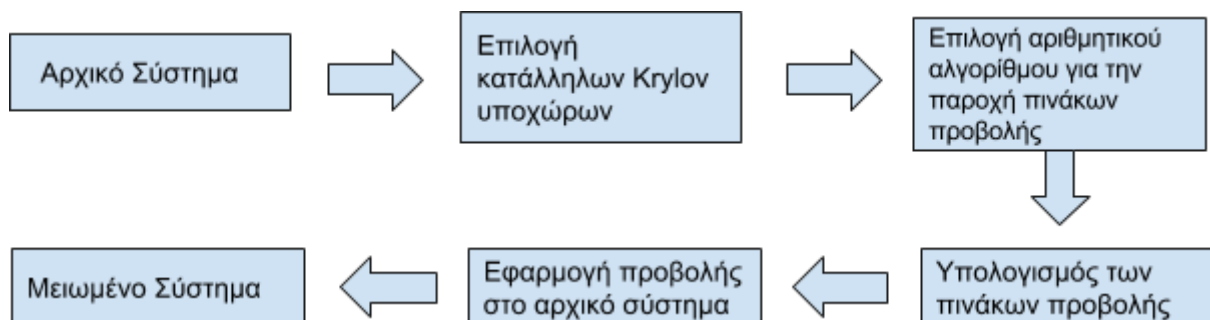


Εικόνα 3.3 : Τα βασικά βήματα της μείωσης των διαστάσεων χρησιμοποιώντας SVD μεθόδους.

### 3.3.2 Krylov subspace μέθοδοι

Οι μέθοδοι της κατηγορίας αυτής είναι μία από τις πιο επιτυχημένες κατηγορίες μεθόδων στον τομέα της αριθμητικής ανάλυσης. Χρησιμοποιούνται από πολλές σύγχρονες επαναληπτικές μεθόδους για την ελάττωση τάξης μεγάλων συστημάτων το οποίο και διαπραγματευόμαστε στην παρούσα εργασία, καθώς και για την εύρεση των ιδιοτιμών μεγάλων αραιών πινάκων ή για την επίλυση μεγάλων γραμμικών συστημάτων, ώστε να αποφεύγονται οι δαπανηρές πράξεις. Στην ελάττωση τάξης μεγάλων συστημάτων ξεκινάμε με την επιλογή κατάλληλων Krylov υποχώρων το οποίο αποτελεί και το βασικότερο βήμα αυτής της διαδικασίας και συνεχίζουν όπως δείχνουμε στην Εικόνα 3.4. Παρόλο που η συγκεκριμένη κατηγορία μεθόδων αποδίδει μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα σε μεγάλης κλίμακας προβλήματα, η διατήρηση της σταθερότητας στο μοντέλο μειωμένης τάξης δεν είναι εγγυημένη. Κατά συνέπεια, η χρήση τους μπορεί να είναι προβληματική κατά περιόδους. Παρακάτω παρουσιάζουμε κάποιες σημαντικές μεθόδους της κατηγορίας αυτής με την χρονολογική σειρά που δημοσιεύτηκαν.

Το **1990** δημοσιεύτηκε η πρώτη μέθοδος, που σχετίζεται με τους Krylov υποχώρους, η Asymptotic Waveform Evaluation (AWE), η οποία χρησιμοποιεί explicit moment matching. Τρία χρόνια αργότερα, το **1993** οι επιστήμονες Freund και ο Feldmann πρότειναν προσέγγιση Padé μέσω της μεθόδου Lanczos αποδεικνύοντας την σχέση της με τους χώρους Krylov. Το **1995** η μέθοδος PRIMA εμφανίστηκε στην δημοσιότητα. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στις ιδέες του Arnoldi αντί εκείνων του Lanczos. Οφείλουμε ωστόσο να επισημάνουμε ότι τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει πολλές ακόμα έρευνες στο τομέα των MOR αλγορίθμων με συνέπεια να υπάρχει ποικιλία διαθέσιμων μεθόδων. Μερικές είναι προσαρμοσμένες σε συγκεκριμένες εφαρμογές ενώ άλλες χρησιμοποιούνται σε γενικά πλαίσια.



Εικόνα 3.4: Τα βασικά βήματα της μείωσης των διαστάσεων χρησιμοποιώντας Krylov subspaces μεθόδους.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Truncated Balanced Realization(TBR)

**Η** μέθοδος TBR όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο ανήκει

στους MOR αλγορίθμους και πιο συγκεκριμένα στην πρώτη κατηγορία, τις SVD μεθόδους . Η μέθοδος αυτή αποτελεί το κύριο κομμάτι της παρούσας εργασίας καθώς καλούμαστε να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της και να την υλοποιήσουμε χρησιμοποιώντας κάποιες άλλες επίσης σπουδαίες τεχνικές . Στο κεφάλαιο αυτό λοιπόν θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό της μεθόδου TBR και στην συνέχεια τα βήματα της υλοποίησης της. Θα επικεντρωθούμε περισσότερο στα αρχικά της βήματα ,όπου θα υλοποιήσουμε δυο ξεχωριστές τεχνικές της θεωρίας ελέγχου για την πραγμάτωση τους.

### 4.1 Ορισμός μεθόδου TBR

Η TBR είναι μια κοινώς χρησιμοποιούμενη προσέγγιση ,που παράγει ελαττωμένα μοντέλα υψηλής ποιότητας δίνοντας περισσότερη έμφαση στην επιλογή των προβαλλόμενων υποχώρων. Η μέθοδος αυτή μελετήθηκε για πρώτη φορά το 1976 από τους Mullis και Roberts για συστήματα διακριτού χρόνου ενώ το 1981 δημοσιεύτηκε επίσημα από τον B.C.Moore για συστήματα συνεχούς χρόνου. Η κύρια ιδέα της μεθόδου [12],[13],[14],[17] είναι η εύρεση ενός μετασχηματισμού ομοιότητας  $T$ , ο οποίος θα μετασχηματίζει τους πίνακες του αρχικού συστήματος, αφήνοντας αμετάβλητη την δυναμική του και απαιτώντας τα Grammians διανύσματα ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας να είναι ίσα και διαγώνια. Στόχος του δηλαδή είναι να αγνοήσει ή να αφαιρέσει τις καταστάσεις, που είναι είτε μη ελέγξιμες ,είτε μη παρατηρήσιμες, είτε και τα δύο ώστε να επιταχυνθούν οι υπολογισμοί της απόκρισης και να μην επιβαρύνετε υπολογιστικά το σύστημα.

Το νέο μοντέλο συστήματος που παράγει ο αλγόριθμος αυτός θα είναι μεν μικρότερης διάστασης από το αρχικό αλλά συγχρόνως θα διατηρεί τις αρχικές του

ιδιότητες όπως την παθητικότητα, την ευστάθεια και θα παρέχει υπολογίσιμα όρια σφάλματος. Επίσης η νέα συνάρτηση μεταφοράς σε σχέση με την συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού συστήματος θα είναι άνω φραγμένη από μια αριθμητικά υπολογίσιμη ποσότητα. Πιο συγκεκριμένα, το σφάλμα της συνάρτησης μεταφοράς και των δύο συστημάτων θα είναι μικρότερο από το διπλάσιο του αθροίσματος των αποκομμένων Hankel τιμών  $\sigma_{r+1} \dots \sigma_n$  με  $r < n$ . Δηλαδή:

$$\|H(s) - H(s)_r\|_{H_\infty} \leq 2 \sum_{r+1}^n \sigma_i.$$

Με την διαδικασία λοιπόν εξισορρόπησης που χρησιμοποιεί η TBR μέθοδος παράγει ένα νέο μοντέλο που θα περιέχει μόνο τα ισχυρά υποσυστήματα του αρχικού, τις καταστάσεις δηλαδή που είναι ταυτοχρόνως ελέγξιμες και παρατηρήσιμες ώστε να εξισορροπηθεί η συνεισφορά τους. Ο συντελεστής της εξισορρόπησης προκύπτει από την τετραγωνική ρίζα των ιδιοτιμών του γινομένου των διανυσμάτων ελεγκσιμότητας και παρατηρησιμότητας.

## 4.2 Υλοποίηση μεθόδου TBR

Όπως επισημάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο οι μέθοδοι της SVD κατηγορίας είναι κατάλληλες για μικρής κλίμακας συστήματα σε αντίθεση με τις μεθόδους Krylov. Λόγω της υψηλής χρονικής πολυπλοκότητας των υπολογισμών τους, η αναγωγή των συστημάτων θα ήταν αρκετά δύσκολο να υλοποιηθεί, γι' αυτό και εφαρμόζονται σε όσο το δυνατόν μικρότερης κλίμακας συστήματα. Έτσι λοιπόν η συγκεκριμένη μέθοδος για να μπορέσει να εφαρμοστεί εξίσου αποδοτικά κι σε συστήματα μεγάλης κλίμακας πρέπει να συνδυαστεί με μεθόδους της δεύτερης κατηγορίας.

Σ' αυτή τη διπλωματική εργασία θα εξετάσουμε τις αλγεβρικές εξισώσεις πινάκων που σχετίζονται με το γραμμικό χρονικό αμετάβλητο δυναμικό σύστημα  $\Sigma$  της μορφής:

$$\begin{aligned} E \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned}$$

όπου  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  και είναι πραγματικοί πίνακες. Υποθέτουμε επιπλέον ότι  $p \ll n$  και  $m \ll n$  για να καταστεί δυνατή η χαμηλής τάξης προσέγγιση των λύσεων.

Θέλουμε λοιπόν με την χρήση των Mor αλγορίθμων και πιο συγκεκριμένα με την χρήση του TBR αλγορίθμου να μετασχηματίσουμε το αρχικό σύστημα  $\Sigma$  σε ένα νέο

σύστημα  $\bar{\Sigma}$  μικρότερης τάξης διατηρώντας παράλληλα τις ιδιότητες του. Θέλουμε να παράγουμε ένα νέο μοντέλο συστήματος της μορφής :

$$\begin{aligned}\bar{E} \bar{x}'(t) &= \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t) \\ \bar{y}(t) &= \bar{C} \bar{x}(t) + \bar{D} u(t)\end{aligned}$$

όπου  $\bar{E}, \bar{A} \in R^{r \times r}$ ,  $\bar{B} \in R^{r \times m}$ ,  $\bar{C} \in R^{p \times r}$ ,  $\bar{D} \in R^{p \times m}$  με  $r \ll n$

τέτοια ώστε

$$\text{misfit}(\Sigma, \bar{\Sigma}) = \sup \frac{\|y - y_r\|}{\|u\|}$$

να είναι μικρό, δηλαδή η απόκριση του συστήματος  $\bar{\Sigma}$  να μην αποκλίνει γραφικά από την απόκριση του συστήματος  $\Sigma$ . Αν επιτευχθεί αυτό, τότε έχουμε μια πάρα πολύ καλή προσέγγιση της λύσης. Παρακάτω δίνονται συνοπτικά τα βήματα του αλγορίθμου TBR σε μορφή ψευδοκώδικα.

#### Αλγόριθμος 1 : Truncated Balanced Realization (TBR)

1. Perform Αλγόριθμος 2 or Αλγόριθμος 3
2. Compute SVD of product  $U \Sigma V^T = Z_C^T Z_B$   
where S is diagonal positive and UV have orthonormal columns
3. Compute the balancing transformations  
 $T = Z_B V \Sigma^{-1/2}$ ,  $T^{-1} = \Sigma^{-1/2} U^T Z_C^T$
4. Form the balanced realization as  $\hat{A} = T^{-1} A T$ ,  $\hat{B} = T^{-1} B$ ,  $\hat{C} = C T$ ,  $\hat{D} = D$
5. Select reduced model order and partition  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  conformally
6. Truncate  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{D}$  to form the reduced realization  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$

Μιλάμε για μια μέθοδο ελάττωσης της κλίμακας ενός συστήματος, η οποία αποτελείται από 2 βασικά στάδια. Στο πρώτο στάδιο θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα μετασχηματισμό ομοιότητας T ώστε να μειώσουμε την υπερβολικά μεγάλη τάξη μεγέθους του αρχικού συστήματος ενώ στο δεύτερο στάδιο θα συνεχίσουμε με την υλοποίηση της μεθόδου **Truncated Balanced Realization (TBR)** πάνω στο ήδη ελαχιστοποιημένο μοντέλο για να βελτιστοποιήσουμε την τάξη του.

Στο πρώτο στάδιο για την εύρεση του μετασχηματισμού T αρχικά λύνουμε προσεγγιστικά και κάνουμε Low Rank παραγοντοποίηση ενός ζεύγους Lyapunov

εξισώσεων υλοποιώντας δυο παρόμοιες μεθόδους, την μέθοδο **Low-rank Cholesky factor ADI iteration (LRCF-ADI)** και έπειτα την μέθοδο **Extended Krylov Subspace Method (EKSM)**, τις οποίες και αναλύουμε εκτενέστερα στα επόμενα κεφαλαία. Στην συνέχεια κάνουμε αποσύνθεση των ιδιάζουσων τιμών του γινομένου των παραγόντων που προκύπτουν από την Low-rank παραγοντοποίηση ώστε να βρεθούν οι ιδιάζουσες τιμές Hankel βάση των οποίων θα γίνει αργότερα η περικοπή των καταστάσεων που είναι τουλάχιστον μη ελέγξιμες ή μη παρατηρήσιμες. Αυτή η διαδικασία αποσύνθεσης είναι γνωστή ως πλήρης SVD και γίνεται ως εξής

$$U \Sigma V^T = \text{svd}(Z_C^T Z_B)$$

όπου ο πίνακας  $U$ ,  $\Sigma$  και  $V$  ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

$$\begin{aligned} U^T * U &= U * U^T = I \\ V^T * V &= V * V^T = I . \end{aligned}$$

Ο  $U$  είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός ορθομοναδιαίος πίνακας,  $\Sigma$  είναι ένας ορθογώνιος διαγώνιος πίνακας με μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς στην διαγώνιο και  $V$  είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός ορθομοναδιαίος πίνακας. Οι ιδιάζουσες τιμές  $\sigma_{ij} = \sqrt{\lambda_i(PQ)}$  είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $\Sigma$  και υπολογίζονται ως τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του γινομένου των low-rank γραμμικών διανυσμάτων των οποίων το πλήθος είναι ίσο με την τάξη του ίδιου του πίνακα. Μια κοινή πρακτική είναι να ταξινομούμε τις ιδιάζουσες τιμές σε φθίνουσα σειρά.

Με βάση τις τιμές που βρέθηκαν στα προηγούμενα βήματα και αφού  $(A, B)$  είναι ελέγξιμο και  $(C, A)$  είναι παρατηρήσιμο, μετατρέπουμε το σύστημα σε μια ισορροπημένη υλοποίηση χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό ομοιότητας  $T \in R^{n \times n}$  και τον αντίστροφο του  $T^{-1} \in R^{n \times n}$  σύμφωνα με τα παρακάτω.

$$\begin{aligned} T &= Z_B V \Sigma^{-1/2} \\ T^{-1} &= \Sigma^{-1/2} U^T Z_C^T \end{aligned}$$

Έτσι ένα αυθαίρετο σύστημα  $(A, B, C)$  μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισορροπημένο σύστημα  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$  μέσω του μετασχηματισμού χώρου κατάστασης  $T$  :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1} A T \\ \hat{B} &= T^{-1} B \\ \hat{C} &= C T . \end{aligned}$$

Επίσης τα Grammians διανύσματα ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας μετασχηματίζονται ως εξής

$$\begin{aligned}\hat{P} &= T^{-1} P T^{-T} \\ \hat{Q} &= T^T Q T,\end{aligned}$$

τα οποία θα είναι συγχρόνως ίσα και διαγώνια. Μόνο οι εσωτερικές μεταβλητές αλλάζουν ενώ το μοντέλο χώρου καταστάσεων και η συνάρτηση μεταφοράς παραμένουν αμετάβλητα .

Στο δεύτερο στάδιο αφού λοιπόν καταφέρουμε να ισορροπήσουμε το σύστημα  $(A, B, C)$ , επόμενο μέλημα μας είναι να το περικόψουμε καταλλήλως ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την τάξη του νέου μοντέλου. Θα πρέπει αρχικά να ορίσουμε ένα όριο σφάλματος που είτε το δίνει ο χρήστης δυναμικά από το πληκτρολόγιο είτε είναι δηλωμένο στατικά και να το συγκρίνουμε με το άθροισμα των ιδιάζουσων τιμών Hankel. Να τονίσουμε ότι ξεκινάμε να αθροίζουμε από την μικρότερη ιδιόμορφη τιμή που βρίσκεται κάτω δεξιά στον πίνακα  $\Sigma$  και συνεχίζουμε με αύξουσα σειρά μέχρι το διπλάσιο του αθροίσματος να ξεπεράσει το όριο σφάλματος που μας δόθηκε. Με το τερματισμό αυτής της διαδικασίας θα έχουν βρεθεί οι ιδιάζουσες τιμές που πρέπει να κρατήσουμε στο σύστημα, των οποίων ο αριθμός θα αποτελέσει κι την νέα τάξη του μοντέλου. Με αυτό το τρόπο αρχίζουμε την περικοπή των εσωτερικών υποσυστημάτων που έχουν μια ασθενή επίδραση στη σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος.

Διαμερίζουμε λοιπόν το σύστημα  $\Sigma$  ως ακολούθως :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

όπου  $\Sigma_1$  περιέχει τις μεγάλες ιδιάζουσες τιμές Hankel και περιγράφει τα “ισχυρά” υποσυστήματα που πρέπει να διατηρούνται ενώ  $\Sigma_2$  περιέχει τις μικρές ιδιάζουσες τιμές Hankel και περιγράφει τα “αδύναμα” υποσυστήματα που πρόκειται να διαγραφούν.

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω ισορροπημένο σύστημα  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$  μέσω του μετασχηματισμού χώρου κατάστασης  $T$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [C_{1,1} \quad C_{2,1}]$$



και ότι ο αριθμός των ιδιάζουσων τιμών, που είναι πάνω από το όριο σφάλματος είναι εξίσου γνωστός. Το ισορροπημένο λοιπόν μοντέλο μειώνεται σε ένα μικρότερο μοντέλο τάξης  $r$ , διατηρώντας μόνο τις  $r$  πρώτες εγγραφές από τις συνολικές του διανύσματος κατάστασης. Παράλληλα, οι πίνακες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  αντικαθίστανται από τους επάνω αριστερά υποπίνακες  $A_{11}$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  με μεγέθη  $r \times r$ ,  $r \times m$  και  $p \times r$  αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, το μειωμένο μοντέλο λαμβάνεται διαγράφοντας τις τελευταίες  $n-r$  γραμμές από τους πίνακες  $A$ ,  $B$  και τις τελευταίες  $n-r$  στήλες από τους πίνακες  $A$ ,  $C$ . Έτσι το νέο μοντέλο που προκύπτει τελικά περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned}\bar{E} \bar{x}'(t) &= A_{1,1} \bar{x}(t) + B_1 u(t) \\ \bar{y}(t) &= C_1 \bar{x}(t) + D u(t)\end{aligned}$$

όπου  $\bar{E}, \bar{A} \in R^{r \times r}$ ,  $\bar{B} \in R^{r \times m}$ ,  $\bar{C} \in R^{p \times r}$ ,  $\bar{D} \in R^{p \times m}$  με  $r \ll n$ .

### 4.3 Προσέγγιση λύσης Lyapunov με Low Rank μεθόδους

Το κλειδί για την επιτυχία επίλυσης μεγάλης κλίμακας Lyapunov εξισώσεων είναι η αποφυγή σχηματισμού της πλήρους λύσης του πίνακα, που είναι συνήθως διάστασης  $n \times n$ . Για τους συμμετρικούς πίνακες διάστασης  $n > 1000$  αποτελεί μια δύσκολη διαδικασία η αποθήκευση ενός τέτοιου πίνακα και χειρότερα ο υπολογισμός όλων των  $n(n+1)/2$  εισόδων που χρειάζονται τουλάχιστον  $O(n^2)$  πράξεις, ακόμη και αν οι συντελεστές των πινάκων είναι αραιοί [16].

Οι πιο πρόσφατες προσεγγίσεις στηρίζονται στη χαμηλή τάξης αναπαράσταση της λύσης  $X$ , στην μορφή

$$X \approx Z Z^H,$$

για ένα πιθανό σύνθετο παράγοντα  $Z$ , με  $k \ll n$  στήλες, την οποία και χρησιμοποιούμε στις μεθόδους μας σε επόμενες ενότητες.

Υπό ορισμένες προϋποθέσεις οι ιδιοτιμές που προκύπτουν από την επίλυση των Lyapunov εξισώσεων φθίνουν γρήγορα. Αυτό οδηγεί στη προσέγγιση της λύσης ως εξής:

$$X \approx X_k := \sum_{j=1}^k \lambda_j z_j z_j^H$$

όπου  $X_{z_j} = \lambda_j z_j$  με διατεταγμένες ιδιοτιμές  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$  και  $Z = [\sqrt{\lambda_1} z_1, \dots, \sqrt{\lambda_k} z_k]$  ο low-rank παράγοντας, ο οποίος κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τα κυρίαρχα ιδιοδιανύσματα του  $X$ .

Εάν το  $k$  είναι μικρό σε σύγκριση με το  $n$ , τότε έχουμε μια πολύ καλή low rank προσέγγιση  $X_k = ZZ^H$  που ικανοποιεί το προφανές όριο σφάλματος

$$\|X - X_k\|_2 \leq \lambda_{k+1},$$

εάν η φθίνωση είναι αρκετά γρήγορη ώστε  $\lambda_{k+1} \leq \tau$ , για αποδεκτή ανοχή σφάλματος  $\tau$ .

Αρχικό βήμα της προσέγγισης είναι να θεωρήσουμε για ευκολία της παραγωγής την Lyapunov εξίσωση

$$AX + XA^T + BB^T = 0$$

με  $A$  ασυμπτωτικά ευσταθές,  $B \in R^{n \times m}$  και λύση  $X$  της παρακάτω μορφής

$$X = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt.$$

Εφαρμόζοντας ένα κατάλληλο τύπου ορθογωνισμού, προκύπτει η προσέγγιση

$$X \approx \sum_{j=1}^k \omega_j e^{At_j} B B^T e^{A^T t_j}$$

με τετραγωνικά σημεία  $t_j$  και βάρη  $\omega_j$ , όπου μόνο τετραγωνικοί τύποι με θετικά βάρη θα πρέπει να επιλεγθούν ώστε να επιτευχθεί μία πραγματική χαμηλής τάξης προσέγγιση χαμηλού βαθμού  $ZZ^T$ . Αυτή η προσέγγιση είναι τάξης  $km$  το πολύ.

Η προσέγγιση ωστόσο αυτή δεν είναι ξεκάθαρα μια καλή προσέγγιση αλλά αποδεικνύεται ότι αν κάποιος επιλέξει  $k = 2K+1$  sinc σημεία ορθογωνισμού με κατάλληλα βάρη, λαμβάνουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση

$$\|X - X_{(2K+1)m}\|_2 \leq \exp(-\pi \sqrt{K})$$

με τη τετραγωνική ρίζα του  $K$  να αντικαθίσταται με  $K$  για έναν συμμετρικό πίνακα  $A$ . Αυτό που πρέπει να σημειωθεί εδώ είναι ότι σύμφωνα με κάποιες παραδοχές, μπορούμε να αναμένουμε μια καλή προσέγγιση χαμηλού βαθμού αν  $m \ll n$ . Στα δύο επόμενα κεφάλαια περιγράφουμε αναλυτικά τις Low Rank μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για να επιλύσουμε το ζεύγος των Lyapunov εξισώσεων.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## Low Rank Cholesky Factorized Alternating Directions Implicit (LRCF-ADI)

**Η** βασική ιδέα στην οποία βασίζονται όλες οι μέθοδοι για αριθμητική επεξεργασία των εξισώσεων πινάκων μεγάλης κλίμακας είναι ότι συχνά η τάξη της λύσης είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την πραγματική της διάσταση και επομένως επιτρέπει μια καλή προσέγγιση μέσω παραγόντων λύσης χαμηλού επιπέδου. Στο παρόν κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε στην low-rank λύση αυτών των εξισώσεων πινάκων βασιζόμενοι σε μεθόδους που σχετίζονται με τις έμμεσες εναλλακτικές διευθύνσεις (ADI). Ξεκινάμε με την εισαγωγή της βασικής επανάληψης ADI και έπειτα την εφαρμογή της στις εξισώσεις Lyapunov.

### 5.1 ADI επανάληψη

Η Alternating-Direction-Implicit (ADI) είναι μια επαναληπτική μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς που χρησιμοποιείται για την επίλυση παραβολικών, υπερβολικών και ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων σε πολλαπλές διαστάσεις και έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε επιστημονικά και μηχανικά πεδία. Συστήθηκε πρώτη φορά το 1955 και προτάθηκε για την επίλυση μεγάλων Sylvester και Lyapunov εξισώσεων από τους αξιόλογους επιστήμονες Ellner και Wachspress. Από τότε και με διάφορες αποτελεσματικές υπολογιστικές βελτιώσεις η προσέγγιση αυτή υπήρξε μία από τις κυριότερες μεθόδους για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων μεγάλης κλίμακας. Στη μέθοδο αυτή, κάθε αριθμητικό βήμα χωρίζεται σε διάφορα δευτερεύοντα υπο-βήματα που βασίζονται στην χωρική διάσταση του προβλήματος και το σύστημα γραμμικής εξίσωσης επιλύεται προς την μια κατεύθυνση ενώ επεξεργάζεται ρητά πληροφορίες κι προς την άλλη κατεύθυνση.

Έστω  $A \in R^{n \times n}$  είναι ένας πραγματικός,συμμετρικός και θετικά ορισμένος (SPD) πίνακας και  $b \in R^n$  είναι γνωστό διάνυσμα. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την επανάληψη ADI για να λύσουμε την παρακάτω εξίσωση

$$Ax=b$$

όπου  $A$  μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα των πινάκων  $H$  και  $V$  για τους οποίους τα γραμμικά συστήματα

$$\begin{aligned}(H + \rho I)v &= r, \\ (V + \rho I)w &= t\end{aligned}$$

έχουν μια αποτελεσματική λύση. Εδώ το  $\rho$  είναι μια κατάλληλα επιλεγμένη παράμετρος και  $r,t$  είναι γνωστά.

Αν οι  $H,V$  είναι SPD τότε υπάρχουν θετικές παράμετροι  $\rho,j$  για τις οποίες η επανάληψη διπλής σάρωσης καθορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned}(H + \rho_j I)x_{j-1/2} &= (\rho_j I - V)x_{j-1} + b, \\ (V + \rho_j I)x_j &= (\rho_j I - H)x_{j-1/2} + b\end{aligned}$$

για  $j = 1, 2, \dots$  converges.

Αν οι παράμετροι μετατόπισης  $\rho,j$  επιλέγονται κατάλληλα ,τότε το ποσοστό σύγκλισης είναι superlinear, αλλά τα ποσοστά σύγκλισης μπορούν να διασφαλιστούν μόνο όταν οι πίνακες  $H$  και  $V$  αλλάζουν. Στην περίπτωση που δεν αλλάζουν η επανάληψη ADI δεν είναι ανταγωνιστική με άλλες μεθόδους. Στην επόμενη υποενότητα θα δείξουμε πως μπορεί να γίνει η επίλυση των Lyapunov εξισώσεων χρησιμοποιώντας την βασική low-rank ADI επαναληψη.

## 5.2 Υλοποίηση μεθόδου LRCF-ADI

Δεδομένου ότι αυτά τα συστήματα που έχουμε να αναλύσουμε είναι δύσκολο να προσομοιωθούν, να υπολογιστούν και να αποθηκευτούν, προσπαθούμε να μειώσουμε αυτό το μεγάλο σύστημα χρησιμοποιώντας επανάληψη LRCF-ADI σε συνδυασμό με την Balanced Truncation [15],[16],[17],[18],[19],[21]. Η μέθοδος LRCF-ADI λύνει τις διπλές εξισώσεις Lyapunov του μεγάλου συστήματος και δίνει ως λύση, χαμηλής τάξης παράγοντες Cholesky, των Grammians διανυσμάτων. Χρησιμοποιώντας αυτούς τους Cholesky παράγοντες, υπολογίζουμε τις Hankel singular values μέσω της διαδικασίας SVD. Στην συνέχεια εφαρμόζουμε balanced truncation για να παράγουμε το μειωμένο σύστημα το οποίο επιθυμούμε.

Πριν ξεκινήσουμε την περιγραφή της μεθόδου αυτής να επισημάνουμε ότι το σύστημα είναι ένα μοντέλο γενικευμένης εξίσωσης Lyapunov που βοηθά στον προσδιορισμό της ασυμπτωτικής σταθερότητας του.

Η γενικευμένη εξίσωση Lyapunov είναι η εξής

$$AX + XA^T = -GG^T.$$

Στην προκειμένη περίπτωση θα εξετάσουμε τις λύσεις του παρακάτω ζεύγους εξισώσεων Lyapunov

$$\begin{aligned} APE^T + EPA^T &= -BB^T \\ A^TQE + E^TQA &= -C^TC \end{aligned}$$

Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων είναι οι πίνακες P και Q, γραμμική ελεγκσιμότητα και γραμμική παρατηρησιμότητα αντίστοιχα. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την επίλυση των εξισώσεων Lyapunov, όπως η μέθοδος Bartel-Stewart, η μέθοδος alternating direction implicit (ADI), η μέθοδος Smith, η μέθοδος Krylov subspace. Εμείς επιλέγουμε σαν πρώτη μέθοδο να υλοποιήσουμε την LRCF-ADI, η οποία δίνει χαμηλής τάξης προσεγγίσεις των λύσεων P,Q αντί πλήρους τάξης λύσεις που προκύπτουν από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν νωρίτερα.

$$P = Z_c Z_c^T, \quad Q = Z_o Z_o^T$$

Αυτή είναι μια σημαντική βελτίωση και ένα μεγάλο πλεονέκτημα όσον αφορά τον χώρο αποθήκευσης και την υπολογιστική ταχύτητα.

Το πρώτο και κυριότερο μέλημα μας είναι να υπολογίσουμε τις βέλτιστες παραμέτρους μετατόπισης,  $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_j\}$ , ώστε να εξασφαλιστεί η γρήγορη σύγκλιση της μεθόδου. Αν και υπάρχουν αρκετές τεχνικές υπολογισμών παραμέτρων, εμείς επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε την λύση του παρακάτω min-max προβλήματος

$$\min_{p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_j} \max_{x \in \mathbb{R}} \prod_{n=1}^j \frac{(p_j - x)}{(p_j + x)}$$

όπου x το σύνολο των τιμών Ritz που λαμβάνονται από την μέθοδο Arnoldi. Σε αυτή την περίπτωση οι τιμές του x είναι σύνθετοι αριθμοί και όχι ένα σύνολο πραγματικών τιμών όπως θα αναμέναμε. Να επισημάνουμε επίσης ότι η LRCF-ADI συγκλίνει μόνο όταν οι παράμετροι μετατόπισης είναι αρνητικές.

Η παραπάνω διαδικασία αποφασίζει εάν οι επιλεγμένες παράμετροι είναι βέλτιστες, υποβέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες. Αν οι ιδιοτιμές του pencil  $(\lambda E - A)$  είναι αυστηρά πραγματικές και οριοθετούνται, τότε είναι δυνατόν να ανακτηθούν οι βέλτιστες παράμετροι. Αφού λοιπόν οι τιμές Ritz είναι σύνθετες, οι παράμετροι θα είναι υποβέλτιστοι. Μόλις ολοκληρωθεί η επιλογή των παραμέτρων, τότε πραγματοποιείται η επανάληψη ADI, η οποία θα δώσει τους παράγοντες  $Z_c$  και  $Z_o$ .

Η ADI επιλύει τις ακόλουθες επαναλήψεις

$$\begin{aligned}(A + p_j E) X_{j-1/2} &= -GG^T - X_{j-1} (A^T - p_j E) \\ (A + \bar{p}_j E) X_j^T &= -GG^T - X_{j-1/2}^T (A^T - \bar{p}_j E).\end{aligned}$$

Αυτά τα δύο βήματα απαιτούνται για να εξασφαλιστεί η συμμετρία της λύσης  $X_j$  όπου  $j$  είναι ο αριθμός των βημάτων επανάληψης. Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις, υποκαθιστώντας δηλαδή τη πρώτη επανάληψη  $X_{j-1/2}$  στη δεύτερη και λύνοντας ως προς  $X_j$ , προκύπτει αυτό το βήμα

$$\begin{aligned}X_j &= -2 p_j (A + \bar{p}_j E)^{-1} GG^T (A + p_j E)^{-T} + (A + p_j E)^{-1} \\ &\quad (A - p_j E) X_{j-1} (A - p_j E)^T (A + \bar{p}_j E)^{-T}\end{aligned}$$

Τώρα, γράφοντας το  $X_j$  ως γινόμενο των Cholesky παραγόντων, δηλ.

$$X_j = Z_j Z_j^T$$

και συνδυάζοντας αυτή τη παραγοντοποίηση με το παραπάνω βήμα προκύπτει

$$Z_j = [\sqrt{-2p_j} ((A + \bar{p}_j E)^{-1} G), (A + p_j E)^{-1} (A - \bar{p}_j E) Z_{j-1}].$$

Το αποτέλεσμα της πρώτης επανάληψης είναι

$$Z_1 = \sqrt{-2p_1} ((A + p_1 E)^{-1} G).$$

Σε κάθε βήμα επανάληψης, μια νέα στήλη προστίθεται στους παράγοντες Cholesky στην ακόλουθη διαδικασία, δηλ.

$$Z_j = [z_j, P_{j-1} z_j, P_{j-2} (P_{j-1} z_j), \dots, P_1 (P_2 \dots P_{j-1} z_j)],$$

όπου

$$P_i = (\sqrt{-2 \operatorname{Re}(p_i)}) / ((\sqrt{-2 \operatorname{Re}(p_{i+1})}) (A + p_i E)^{-1} (A - p_{i+1} E))$$

είναι το επαναληπτικό βήμα και το γινόμενο  $Z_j Z_j^T$  υπολογίζεται για να βρεθεί το  $X_j$ .

Μετά την αντικατάσταση του  $X_j$  στην εξίσωση  $A X E^T + E X A^T = -G G^T$ , ελέγχεται μετά από κάθε βήμα της επανάληψης ο residual κανόνας

$$\| A X_j E^T + E X_j A^T - G G^T \| < \varepsilon.$$

Τα βήματα του αλγορίθμου επαναλαμβάνονται μέχρι να ξεπεραστεί η επιθυμητή ανοχή  $\varepsilon$ . Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά θα παίρνουμε διαφορετικά αποτελέσματα για τις λύσεις των διπλών Lyapunov εξισώσεων  $P, Q$  και διαφορετικές παραγοντοποιήσεις αυτών, μέχρι να βρεθεί η κατάλληλη χαμηλής τάξης προσέγγιση.

$$P = Z_c Z_c^T, \quad Q = Z_o Z_o^T$$

Τέλος να επισημάνουμε ότι η συμπίεση κατά στήλες υπολογίζει μία συμπιεσμένη μορφή του παράγοντα Cholesky χρησιμοποιώντας Q R αποσύνθεση. Η διαδικασία συμπίεσης απαιτείται στην περίπτωση αποτυχίας να υπολογιστούν οι βέλτιστοι παράμετροι ολίσθησης που οδηγούν σε αργή σύγκλιση με πολλά επαναληπτικά βήματα. Αυτό σταδιακά θα αυξήσει τη διάσταση του υπόχωρου, ο οποίος αποτελείται από στήλες χαμηλής τάξης παραγόντων Cholesky. Κάθε νέα στήλη προστίθεται σε κάθε βήμα επανάληψης στο παράγοντα Cholesky  $Z_j$ . Αυτές οι νέες στήλες καταλαμβάνουν τη μνήμη και αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος της επανάληψης. Είναι λοιπόν απαραίτητο να κρατήσουμε τους παράγοντες όσο το δυνατόν χαμηλούς σε τάξη.

## Αλγόριθμος 2: Low-rank Cholesky factor ADI iteration (LRCF-ADI)

**Input:** E, A, B and ADI shifts  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, \text{maxiter}$ .

**Output:**  $Z \in \mathbb{R}^{n \times k}$  with  $P \approx Z Z^T$

1.  $Z_0 = []$
2.  $i=1$
3. **while**(not converged) and ( $i < \text{maxiter}$ ) **do**
4.     **if**  $i = 1$  **then**
5.         Solve  $(A + p_1 E) V_1 = B$  for  $V_1$
6.     **else**



```

7.      Solve  $(A + p_1 E) \bar{V} = E V_{i-1}$  for  $\bar{V}$ 
8.       $V_i = V_{i-1} - (p_i + \overline{p_{i-1}}) \bar{V}$ 
9.      end if
10.     if  $p_i \in R$  then
11.          $V_i = \text{Re}(V_i)$ 
12.         Update LRCF  $Z_i = [Z_{i-1} \sqrt{-2p_i} V_i]$ 
13.     else
14.          $\alpha = 2\sqrt{-\text{Re}(p_i)}$  ,  $\beta = \text{Re}(p_i) / \text{Im}(p_i)$ 
15.          $V_{i+1} = \bar{V}_i + 2\beta \text{Im}(V_i)$ 
16.         Update LRCF  $Z_{i+1} = [Z_{i-1}, \alpha (\text{Re}(V_i) + \beta \text{Im}(V_i)) , \alpha \sqrt{(\beta^2 + 1)} \text{Im}(V_i)]$ 
17.          $i = i + 1$ 
18.     end if
19.      $i = i + 1$ 
20. end while

```

### 5.3 Κριτήριο τερματισμού

Ο κανονικοποιημένος κανόνας που αντιστοιχεί στο χαμηλής τάξης παράγοντα Cholesky  $Z$  ορίζεται ως εξής (Normalized Residual Norm)

$$\text{NRN}(Z) = \| FZZ^T + ZZ^T F^T + GG^T \|_F / \| GG^T \|_F ,$$

ωστόσο ο υπολογισμός των τιμών  $\text{NRN}(Z_i)$  κατά τη διάρκεια της επανάληψης μπορεί να είναι πολύ ακριβός.

Μερικές φορές αυτό το ποσό υπολογισμού μπορεί να υπερβεί το υπολογιστικό κόστος της ίδιας επανάληψης. Εκτός αυτού ο υπολογισμός των NRN μπορεί να απαιτήσει σημαντική ποσότητα μνήμης. Αυτό το ποσό είναι περίπου ανάλογο με το  $t_i$ . Γι αυτό το λόγο μπορεί να είναι προτιμότερο να αποφεύγονται τα κριτήρια τερματισμού που βασίζονται στο NRN αντ'αυτού να χρησιμοποιούνται φθηνότερα κριτήρια υπολογισμού.

Τα δύο πιο κοινά χρησιμοποιούμενα κριτήρια τερματισμού για τον αλγόριθμο 2 βασίζονται στον έλεγχο της σχετικής μεταβολής του παράγοντα  $Z$  δηλ.

$$p_i \in R : rc_i = \|\sqrt{-2p_i} V_i\|_F / \|Z_i\|_F$$

$$p_i \in C \setminus R : rc_i = \alpha \| [Re(V_i) + \beta Im(V_i), \sqrt{(\beta^2 + 1)} \cdot Im(V_i)] \|_F / \| Z_i \|_F$$

είτε το residual της τρέχουσας επανάληψης

$$\mathcal{L}(Z_i) := FZ_iZ_i^T E^T + EZ_iZ_i^T A^T + GG^T.$$

Για τις επαναλήψεις της δικής μας εκτέλεσης μπορεί να παρατηρηθεί ότι το residual είναι της ακόλουθης δομής χαμηλής τάξης

$$\mathcal{L}(Z_i) = (F - \overline{p_i}E)V_i V_i^H (F - \overline{p_i}E) =: \widehat{V}_i \widehat{V}_i^H.$$

Εδώ οι πολλαπλασιασμοί παραμένουν από τον αντίστροφο μετασχηματισμό της εξίσωσης Stein. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι

$$\widehat{V}_i = \widehat{V}_{i-1} - 2 Re(\mu_i) E V_i$$

παρέχοντας έναν εύκολο τύπο ο οποίος αποθηκεύει το πρόσθετο γινόμενο μετατοπισμένου διανύσματος πίνακα.

Από αυτή την αναπαράσταση τόσο για τα φασματικά όσο και για τον κανόνα Frobenius προκύπτει:

$$\|\mathcal{L}(Z_i)\| = \|\widehat{V}_i \widehat{V}_i^H\| = \|\widehat{V}_i^H \widehat{V}_i\| = \|\widehat{V}_i\|^2$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι σε περίπτωση που οι προβολές χρησιμοποιούνται για την επιτάχυνση της επανάληψης, ο residual τύπος δεν είναι πλέον έγκυρος. Σ' αυτή τη περίπτωση ο  $\widehat{V}_i$  θα πρέπει να προβάλλεται στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στον οποίο εκτελέστηκε η προβολή. Δυστυχώς αυτό δεν είναι αποτελεσματικά δυνατό. Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο φασματικός κανόνας. Λόγω συμμετρίας και σαφήνειας του residual, αυτό συμπίπτει με τη μέγιστη ιδιοτιμή και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια μέθοδος Lanczos για να εξάγουμε μια καλή προσέγγιση γρήγορα.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## Extended Krylov Subspace Method (EKSM)

$\Sigma$ το τρέχον κεφάλαιο θα εξετάσουμε μία δεύτερη σημαντική μέθοδο για την αριθμητική επίλυση των Lyapunov εξισώσεων μεγάλων συστημάτων, την επαναληπτική μέθοδο EKSM. Θα ασχοληθούμε πρώτα με την κατηγορία των απλών Krylov Subspace μεθόδων στην οποία ανήκουν, δίνοντας κάποια σημαντικά κοινά χαρακτηριστικά τους και στην συνέχεια θα περάσουμε στην επέκταση της, την οποία και καλούμαστε να υλοποιήσουμε.

### 6.1 Standard Krylov Subspace μέθοδοι

Το γενικό πλαίσιο επίλυσης των μεθόδων αυτών σχετίζεται με τη προβολή του αρχικού προβλήματος σε ένα πολύ μικρότερο υπόχωρο δίνοντας ως αποτέλεσμα ένα ίδιου τύπου σύστημα γραμμικών εξισώσεων μειωμένης τάξης. Οι μέθοδοι αυτής της κατηγορίας στηρίζονται στην διαδικασία της προβολής και επιτυγχάνουν ακρίβεια μέσω του μηχανισμού moment-matching.

Ένας υπόχωρος Krylov λοιπόν ορίζεται από την διαδοχή των εξής διανυσμάτων

$$K_m(A, b) = \text{span}\{b, Ab, \dots, A^{m-1}b\}$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ένας πίνακας,  $b \in \mathbb{R}^n$  είναι το αρχικό διάνυσμα και  $b, Ab, \dots, A^{m-1}b$  είναι τα παραγόμενα βασικά διανύσματα που καλύπτουν τον m-th Krylov υπόχωρο.

Τα πρώτα βασικά γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα αποτελούν την βάση του Krylov υποχώρου. Σε περίπτωση πολλαπλών αρχικών διανυσμάτων πρέπει να θεωρηθεί ένα m-th block προκειμένου ο υπόχωρος Krylov να μπορεί να αποδωθεί με ακρίβεια από το παρακάτω

$$K_m(A, B) = \text{span}\{B, AB, \dots, A^{m-1}B\}$$

όπου  $A \in R^{n \times n}$  είναι ένας πίνακας και  $B = [b_1, b_2, \dots, b_p] \in R^{n \times p}$  είναι ο αρχικός πίνακας που περιέχει τα αρχικά γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Αν  $p=1$  τότε παίρνουμε τον standard Krylov υπόχωρο  $K_m(A, b)$  με αρχικό διάνυσμα  $b$ .

## 6.2 Μέθοδοι προβολής για τις Krylov Subspace μεθόδους

Οι μέθοδοι της κατηγορίας των Krylov υποχώρων βασίζονται στην ιδέα της προβολής για να επιλύσουν μεγάλης κλίμακας εξισώσεις πινάκων, την οποία και αναλύσαμε σε ικανοποιητικό βαθμό στο κεφάλαιο 3 όσον αφορά γενικά την συμπεριφορά των Mor αλγορίθμων. Στην προκειμένη φάση θα μιλήσουμε συγκεκριμένα για την λειτουργία των Krylov Subspace μεθόδων.

Ας υποθέσουμε  $U \in R^{n \times k}$  με  $U^T U = I_k$ , όπου οι στήλες του  $U$  καλύπτουν [16] έναν υπόχωρο διάστασης  $k$ ,  $U \subset R^n$  και  $P_U = U U^T$  είναι η κανονική ορθογώνια προβολή πάνω στο  $U$ .

Η βασική ιδέα της προβολής των Lyapunov εξισώσεων σε τέτοιους υποχώρους ξεκίνησε αρχικά από τον αξιόλογο επιστήμονα Y.Saad και έπειτα από τους Jaimoukah και Kasenally, οι οποίοι επιλέχθηκαν ένας-ένας ξεχωριστά να εφαρμόσουν τις δικές τους μεθόδους Krylov υποχώρων για την επίλυση μεγάλων Lyapunov εξισώσεων. Στην συνέχεια η ιδέα της επιλογής ενός Krylov υποχώρου επεκτάθηκε περαιτέρω από την V.Simoncini, η οποία χρησιμοποίησε εκτεταμένους-ορθολογικούς Krylov υποχώρους. Η κοινή προσέγγιση σε όλες αυτές τις αναφορές είναι η επίλυση της προβαλλόμενης Lyapunov εξίσωσης

$$U^T F U Y + Y U^T F^T U = -U^T G G^T U$$

αντί της εξίσωσης

$$F X + X F^T = -G G^T.$$

Μετά την επίλυση της παραπάνω Lyapunov εξίσωσης υπολογίζουμε  $Y = C^T C$  μέσω παραγοντοποίησης Cholesky ή μέσω της αποσύνθεσης της προβαλλόμενης λύσης  $Y$  και θεωρούμε  $Z = U C^T$  ως τη προσέγγιση των Cholesky παραγόντων της λύσης. Σε περίπτωση που η λύση δεν είναι αρκετά ακριβής π.χ. κρίνοντας από το residual που υπολογίζεται από την εισαγωγή του  $ZZ^T$ , πρέπει να βρεθεί μία επέκταση ή και

μία ενημέρωση του υπόχωρου  $U$  για να αυξηθεί η εγγυρότητα της προσεγγιστικής λύσης.

Ένας κοινός περιορισμός σε όλες τις προσεγγίσεις μέσω προβολής είναι η προβολή του πίνακα  $U^T F U$  να παραμείνει Hurwitz (δηλ. όλες οι ιδιοτιμές να βρίσκονται στο ανοιχτό αριστερό ημιεπίπεδο) έτσι ώστε να επιτευχθεί η επίλυση της εξίσωσης

$$U^T F U Y + Y U^T F^T U = -U^T G G^T U.$$

Αυτό συνήθως εξασφαλίζεται από τη παραδοχή ότι ο πίνακας  $F$  πληρεί την εξής ανισότητα  $F + F^T < 0$ , η οποία ικανοποιεί το Bendixon θεώρημα. Αυτή είναι μια επαρκής προϋπόθεση έτσι ώστε ο πίνακας  $U^T F U$  να είναι Hurwitz, για κάθε  $U$  που ορίστηκε παραπάνω.

Η συγκεκριμένη διαδικασία θυμίζει την ανάλυση της μεθόδου GMRES για τυπικά γραμμικά συστήματα Mikkelsen και δείχνει ότι η μέθοδος προβολής που προκύπτει από την επιλογή του υπόχωρου Arnoldi για το  $U$  μπορεί να συγκλίνει αυθαίρετα και όχι καλά. Στην πράξη, αυτές οι μέθοδοι δεν ήταν ανταγωνιστικές με τις επαναλήψεις τύπου low rank ADI ή Smith μέχρι την ανακάλυψη της μεθόδου Extended Arnoldi από την V.Simoncini.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την αλγεβρική Riccati εξίσωση έχουν εκπονηθεί από τον Jbilou και τους συγγραφείς σε μία σειρά εγγράφων από το 2003, αλλά η βασική ιδέα επίσης διαμορφωνόταν στα έγγραφα από τους Jaimoukah και Kasenally. Η προβαλλόμενη Riccati εξίσωση

$$C^T C + A^T X E + E^T X A - E^T X B B^T X E = 0$$

σε πλήρη αναλογία με την εξίσωση

$$U^T F U Y + Y U^T F^T U = -U^T G G^T U$$

μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\overline{C}^T \overline{C} + \overline{A}^T Y \overline{E} + \overline{E}^T Y \overline{A} - \overline{E}^T Y \overline{B} \overline{B}^T Y \overline{E} = 0$$

όπου οι συντελεστές και τα δεδομένα των πινάκων ορίζονται ως  $\overline{C} = C U$ ,  $\overline{B} = U^T B$ ,  $\overline{A} = U^T A U$ , και  $\overline{E} = U^T E U$ . Ωστόσο η συνθήκη  $F + F^T < 0$  εξασθενεί εδώ. Αυτό σημαίνει ότι δεν απαιτείται η ιδιότητα Hurwitz για το ίδιο το συμμετρικό τμήμα του  $E^{-1} A$  αλλά για τους αντίστοιχους ευσταθής πίνακες κλειστού βρόγχου.

### 6.3 Υλοποίηση της EKSM μεθόδου

Αρχικά ο Druskin και ο Knizherman θεώρησαν ότι ο υπόχωρος  $K$  μπορούσε να εμπλουτιστεί ώστε να περιέχει περισσότερες πληροφορίες από εκείνες του κανονικού υποχώρου  $K_m(F, G)$  [22],[23],[24],[25]. Για το σκοπό αυτό, ξεκινώντας από το ζεύγος  $\{G, F^{-1}G\}$  πρότειναν να δημιουργηθεί μια ακολουθία χώρων προσέγγισης που περιέχουν πληροφορίες τόσο για το  $F$  όσο και για το  $F^{-1}$ , με την προσθήκη δυο διανυσμάτων κάθε φορά, ενός πολλαπλασιασμένου με το  $F$  και ενός άλλου με το  $F^{-1}$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} E K_m(F, G) &= K_m(F, G) \cup K_m(F^{-1}, F^{-1}G) \Rightarrow \\ E K_m(F, G) &= \text{span}\{G, F^{-1}G, FG, F^{-2}G, F^2G, \dots\}. \end{aligned}$$

Οι Extended Krylov υπόχωροι λοιπόν είναι ένας συνδυασμός των Krylov υποχώρων  $K_m(F, G)$  και  $K_m(F^{-1}G)$  και θεωρείται μια νέα τάξη υποχώρων για τη προσέγγιση συνάρτησης πινάκων. Μόλις δημιουργηθεί ο χώρος προσέγγισης, το αρχικό πρόβλημα προβάλλεται σε αυτόν τον χώρο και το προκύπτον πρόβλημα μικρών διαστάσεων επιλύεται.

Στην συνέχεια το 2006 η Simoncini είχε την ιδέα να εφαρμόσει ακριβώς αυτόν τον υπόχωρο στη μέθοδο της που ήταν αρχικά γνωστή ως KpiK (Krylov plus inverse Krylov) παρατηρώντας ότι ο παραπάνω υπόχωρος είναι ισοδύναμος με τον χώρο  $K_{2m}(F, F^{-m}G)$ . Είναι ξεκάθαρο δηλαδή ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$E K_m(F, G) = K_{2m}(F, F^{-m}G)$$

και

$$E K_m(F, G) \subseteq E K_{m+1}(F, G).$$

Σε κάθε επανάληψη αυτής της διαδικασίας, προστίθονται στον χώρο 2 νέα μπλόκ  $k$  διανυσμάτων, έτσι ώστε η διάσταση του χώρου να αυξάνεται κατά  $2k$ . Να επισημάνουμε ότι η ορθογώνια βάση της Extended Krylov Subspace δημιουργείται επαναληπτικά και ο χώρος επεκτείνεται με την διαδικασία Gram-Schmidt, με τρόπο παρόμοιο με αυτόν του απλού Krylov υποχώρου.

Στην συνέχεια δημιουργούμε με επαναληπτικό τρόπο τον πίνακα προβολής που αντιπροσωπεύει το πίνακα  $F$ , χωρίς επιπλέον πολλαπλασιασμό πίνακα-διανύσματος με τον  $F$ , χρησιμοποιώντας μια άλλη επαναληπτική διαδικασία. Αν οι στήλες του  $U_m$  εκτείνονται στον υπόχωρο  $E K_m(F, G)$  τότε απαιτείται μία ad-hoc διαδικασία για να προσδιοριστεί ο πίνακας προβολής του  $F$ ,  $F_i = U_m^T F U_m$ , δεδομένου ότι η

Gram-Schmidt διαδικασία παράγει πολλαπλασιασμούς πινάκων-διανυσμάτων με τον  $F$  χωρίς κόστος μόνο για τις περιττές στήλες του. Το ίδιο κάνουμε κι για να δημιουργήσουμε τον πίνακα προβολής του  $G$ ,  $G_i = U_m^T G$ .

Μία επαναληπτική διαδικασία που μπορεί να εφαρμοστεί έτσι ώστε να προσδιοριστούν οι παραπάνω πίνακες είναι η εξής: οι περιττές στήλες συμπίπτουν με τις στήλες του πίνακα συντελεστών στη διαδικασία Gram-Schmidt, ενώ οι ζυγές στήλες ανακτώνται μέσω βοηθητικής επανάληψης μικρού-μήκους διανυσμάτων. Σε κάθε επανάληψη αφού ενημερωθούν τα  $F_i$ ,  $G_i$  λύνεται μια Lyapunov εξίσωση μικρής διάστασης με πίνακες μεγέθους  $2km \times 2km$

$$F_i Y_i + Y_i F_i^T = -G_i^T G_i,$$

από την οποία υπολογίζεται κάθε φορά το  $Y_i$ . Έπειτα κάνουμε έλεγχο σύγκλισης της μεθόδου χρησιμοποιώντας το κριτήριο τερματισμού της επόμενης ενότητας. Αν δούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει παραγοντοποιούμε το  $Y_i$  κατά Cholesky, βρίσκουμε τον παράγοντα  $Z$  που επιθυμούμε κι τερματίζει η διαδικασία. Αν η μέθοδος δεν συγκλίνει στην τρέχουσα επανάληψη ανανεώνεται ο υπόχωρος και γίνονται οι κατάλληλες ορθογωνοποιήσεις που αναλύσαμε παραπάνω για να αυξηθεί η εγγυρότητα της προσεγγιστικής λύσης.

### Αλγόριθμος 3 : Extended Krylov Subspace Method (EKSM)

**Input:**  $E, A, B$  with  $E^{-1} A + A^T E^{-T} < 0$

**Output:**  $Z \in R^{n \times k}$  with  $X \approx Z Z^T$

- 1: **if**  $E = I$  **then**
- 2: Set  $F = A, G = B$
- 3: **else**
- 4: Compute Cholesky decomposition  $LL^T = E$
- 5: Set  $F = L^{-1} A L^{-T}$ ,  $G = L^{-1} B$
- 6: **end if**
- 7:  $V_1 = \text{orth}([G, F^{-1} G])$
- 8:  $i = 2, U = V_1$
- 9: **while** ( $i < \text{maxiter}$ ) **do**
- 10:  $F_i = U^T F U$  and  $G_i = U^T G$
- 11: Solve  $F_i Y_i + Y_i F_i^T = -G_i^T G_i$  for  $Y_i$
- 12: **if** (converged) **then**
- 13: **if** ( $E = I$ ) **then**



```

14:    $Z = U \text{ chol}(Y_i)$  and STOP
15:   else
16:      $Z = L^{-T} U \text{ chol}(Y_i)$  and STOP
17:   end if
18: end if
19:  $V_{i+1} = [F U(:, 2j-1), F^{-1} U(:, 2j)]$ 
20: Orthogonalize  $V_{i+1}$  with respect to U
21: Orthogonalize  $V_{i+1}$  internally
22:  $U = [U, V_{i+1}]$ 
23:  $i = i + 1$ 
24: end while

```

Για πιο γενικούς μη ταυτοτικούς πίνακες  $E$  γίνεται απλά μία αντικατάσταση από τη αποσύνθεση LU στα παραπάνω. Ως εναλλακτική λύση στην προσέγγιση της αποσύνθεσης θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε να διατυπώσουμε τον αλγόριθμο σύμφωνα με τους όρους  $E^{-1}A$ , επιλύοντας ως προς  $E$  όποτε η αντιστροφή είναι απαραίτητη. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να αποφευχθεί η επιπλέον κατανάλωση μνήμης που προκαλείται από τους Cholesky παράγοντες με κόστος την απώλεια της εύκολης residual επανάληψης.

## 6.4 Κριτήριο τερματισμού

Ένα βασικό συστατικό για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου EKSM είναι η παρατήρηση ότι η νόρμα στο  $k$ -οστό βήμα μπορεί να υπολογιστεί μέσω του

$$\|FZZ^T + ZZ^TF^T + GG^T\| = \|G_k^T F_k Y_k\|$$

δηλ, βασίζεται στη προβολή μικρότερων δεδομένων, αποφεύγοντας το ρητό σχηματισμό του πλήρους residual, ή ακόμα και του παράγοντα  $Z$ . Δυστυχώς η διατύπωση αυτή ισχύει μόνο για Lyapunov εξισώσεις της μορφής

$$FX + XF^T = -GG^T$$

και δεν μπορεί να επεκταθεί στις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} APE^T + EPA^T &= -BB^T, \\ A^TQE + E^TQA &= -C^TC. \end{aligned}$$

Έτσι η αποσύνθεση Cholesky του  $E$  στον αλγόριθμο μαζί με τις επιπλέον απαιτήσεις μνήμης για τον  $R$  δε μπορεί να αποφευχθεί. Να σημειώσουμε επίσης ότι ο  $R$  χρησιμοποιείται σε ολόκληρο τον αλγόριθμο για να αποφευχθεί ο σαφής σχηματισμός του πίνακα  $F$ , ο οποίος θα γινόταν εύκολα πυκνός.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

## Υλοποίηση της προσομοίωσης

**Σ**το κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε πώς μοντελοποιούμε το κύκλωμα που μας δόθηκε από το αρχείο εισόδου, πως εξάγουμε το MNA σύστημα του κυκλώματος που επιθυμούμε αλλά και το πως το απλοποιούμε στην συνέχεια κάνοντας χρήση της μεθόδου TBR ώστε να λυθεί το σύστημα πολύ γρηγορότερα σε σχέση με το αρχικό.

### 7.1 Κατασκευή Προσομοιωτή

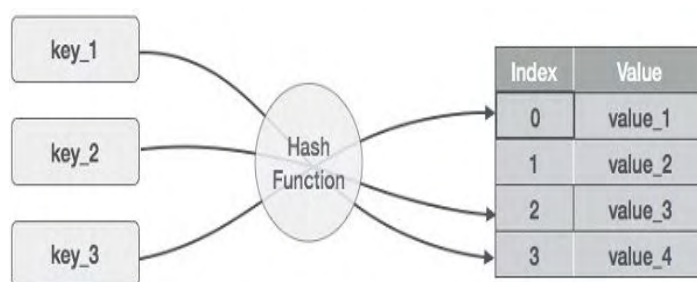
Η υλοποίηση μας ξεκινάει από το σημείο όπου λαμβάνουμε το αρχείο εισόδου του προσομοιωτή [26]. Το αρχείο αυτό είναι ένα αρχείο περιγραφής κυκλώματος σύμφωνα με κάποιο προκαθορισμένο πρότυπο, το οποίο είναι κοινό για τις περισσότερες εφαρμογές προσομοίωσης κυκλωμάτων.

Το κάθε κυκλωματικό στοιχείο έχει το δικό του προκαθορισμένο όνομα καθώς και μια συγκεκριμένη μορφή, από την οποία ορίζουμε τις διάφορες παραμέτρους του. Όπως γνωρίζουμε υπάρχουν πολλά είδη τέτοιων στοιχείων τα οποία πρέπει να συμπεριλάβουμε στον δικό μας αναλυτή.

### 7.2 Αρχείο περιγραφής κυκλώματος

Όπως προαναφέραμε, το αρχικό στάδιο για τη δημιουργία ενός προσομοιωτή είναι να διαβάσουμε το αρχείο εισόδου και να μεταφέρουμε τις πληροφορίες του στον προσομοιωτή μας. Συνεπώς, διατρέχουμε τις γραμμές του αρχείου μία προς μία (κάθε γραμμή περιγράφει ένα κυκλωματικό στοιχείο) και στη συνέχεια όλες τις παραμέτρους του κάθε στοιχείου.

Κάθε φορά που διαβάζουμε ένα στοιχείο το καταχωρούμε σε μια κατάλληλη δομή λίστας ώστε να μην χρειάζεται να ανατρέχουμε κάθε φορά στο αρχείο εισόδου. Ωστόσο κάθε κυκλωματικό στοιχείο που διαβάζεται περιέχει κόμβους, στους οποίους το στοιχείο είναι συνδεδεμένο. Για να γίνει ευκολότερη λοιπόν η οργάνωση των στοιχείων χρησιμοποιούμε τον πίνακα κατακερματισμού για την αποθήκευσή τους. Η θέση ενός στοιχείου μέσα σε ένα πίνακα κατακερματισμού (Εικόνα 7.1) ορίζεται απευθείας ως συνάρτηση του ίδιου του στοιχείου και όχι ύστερα από μια σειρά συγκρίσεων, με αποτέλεσμα να γίνεται ταχύτερη η αναζήτηση, με πολύ καλή απόδοση.



Εικόνα 7.1: Παράδειγμα χρήσης hashtable

### 7.3 Χρήση του πίνακα κατακερματισμού

Κάθε φορά που διαβάζουμε ένα νέο κυκλωματικό στοιχείο από το αρχείο εισόδου αποθηκεύουμε στον πίνακα κατακερματισμού τους κόμβους με τους οποίους συνδέεται αυτό. Χρησιμοποιούμε το όνομα των κόμβων με τους οποίους είναι συνδεδεμένο το νέο στοιχείο για να ελέγξουμε αν υπάρχουν στην συνδεσμολογία ή όχι. Αν το όνομα του κόμβου υπάρχει, μας επιστρέφεται η τιμή που έχει λάβει στο σύστημά μας την δεδομένη στιγμή και την οποία θα κρατήσει στην διαδικασία δημιουργίας του MNA πίνακα. Αντίθετα σε περίπτωση που το όνομα του κόμβου δεν εντοπίζεται, δημιουργείται μια νέα καταχώρηση στον πίνακα κατακερματισμού και επιστρέφεται η νέα τιμή του κόμβου.

Στο τέλος της διαδικασίας αυτής, έχουμε έναν πίνακα ο οποίος περιέχει από μία φορά τον κάθε κόμβο του συστήματος χωρίς επαναληπτικές καταχωρήσεις και χωρίς να υπάρχουν κενά στην αρίθμηση των κόμβων. Στη συνέχεια μπορούμε πολύ εύκολα να κατασκευάσουμε τον MNA πίνακα.

## 7.4 MNA σύστημα του κυκλώματος

Αφού λοιπόν ολοκληρωθεί το διάβασμα του αρχείου εισόδου και η αποθήκευση των πληροφοριών του στην δομή δεδομένων που επιλέξαμε, συνθέτουμε το σύστημα MNA του κυκλώματος. Στο σημείο αυτό δεν θα μπορούμε σε πολλές λεπτομέρειες καθώς η διαδικασία αυτή έχει περιγραφεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2. Το μόνο που χρειάζεται είναι να ακολουθήσουμε το πρότυπο που παρέχεται για την σύνθεση του πίνακα.

Η βασική ιδέα είναι ότι για κάθε στοιχείο που διαβάζεται από το αρχείο εισόδου δίνεται ένα είδος σφραγίδας, η οποία περιγράφει ακριβώς την συνεισφορά του στοιχείου στη δομή του MNA πίνακα. Κάθε στοιχείο ανήκει σε μια συγκεκριμένη ομάδα στοιχείων που επηρεάζουν ανάλογα τη συμπεριφορά του κυκλώματος. Αυτές οι ομάδες είναι δύο. Η ομάδα 1, η οποία περιέχει αντιστάσεις, πυκνωτές και πηγές ρεύματος και η ομάδα 2, η οποία περιέχει πηγία και πηγές τάσεις.

Αφού δημιουργήσουμε λοιπόν αυτές τις δύο ομάδες στοιχείων χωρίζουμε αντίστοιχα τον πίνακα και τα διανύσματα ρευμάτων και τάσεων επίσης σε 2 άλλες ομάδες. Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε τους νόμους του Kirchhoff για τα ρεύματα και τις τάσεις (KCL, KVL), ώστε να εξάγουμε τις εξισώσεις και να ανάγουμε το σύστημα εξισώσεων σε μορφή πίνακα. Τέλος με τη βοήθεια αυτών των πινάκων καταλήγουμε στο MNA σύστημα του κυκλώματος μας. Να επισημάνουμε πάλι ότι τα βήματα κατασκευής του MNA συστήματος είναι ακριβώς ίδια με αυτά που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 2, γι'αυτό και τα παραλείψαμε στο συγκεκριμένο σημείο.

## 7.5 Χρήση μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου

Αφού μοντελοποιήσουμε λοιπόν το κύκλωμα που μας δόθηκε από το αρχείο εισόδου και εξάγουμε το MNA σύστημα του κυκλώματος που επιθυμούμε, το απλοποιούμε κάνοντας χρήση κάποιας μεθόδου υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR), ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την τάξη του αρχικού συστήματος.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία η μέθοδος που επιλέχθηκε να μελετηθεί αλλά και να υλοποιηθεί είναι η μέθοδος TBR. Ο αλγόριθμος της αναλύθηκε λεπτομερώς στα κεφάλαια 4,5,6.

Η TBR λαμβάνει ως αρχικά ορίσματα τους πίνακες A,B,C και D και παράγει νέους μικρότερης διάστασης πίνακες  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ . Έπειτα έχοντας αυτές τις εισόδους,εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο προκειμένου να φτάσουμε στο επιθυμητό

αποτέλεσμα, μέσα από τη δημιουργία της συνάρτησης μεταφοράς του αρχικού συστήματος και της συνάρτησης μεταφοράς του μειωμένου συστήματος που προκύπτει μετά τη χρήση του. Η απόκριση συχνότητας του νέου συστήματος θα προσεγγίζει όσο γίνεται περισσότερο την αντίστοιχη απόκριση του αρχικού. Δηλαδή το σφάλμα της προσέγγισης να είναι πολύ μικρό.

Να επισημάνουμε ωστόσο ότι οι πίνακες μας θα πρέπει να είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι (SPD), για το λόγο αυτό φροντίσαμε το αρχικό μας κύκλωμα να αποτελείται μόνο από στοιχεία της ομάδας 1, δηλαδή αντιστάτες, πυκνωτές και πηγές ρεύματος.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

## Εκτίμηση της λύσης -Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε κάποια ενδεικτικά αποτελέσματα του αλγορίθμου TBR που πήραμε από τα αρχεία περιγραφής κυκλωμάτων κάνοντας χρήση και των δύο Low Rank μεθόδων που υλοποιήσαμε ώστε να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την TBR ως σύνολο. Μέσα από κατάλληλες γραφικές αναπαραστάσεις προσπαθούμε να δείξουμε την ορθότητα και την ακρίβεια της μεθόδου και να αποδείξουμε ότι δικαιολογημένα θεωρείται μια από τις αποδοτικότερες μεθόδους ελάττωσης τάξης συστήματος.

### 8.1 Ανάλυση υλοποίησης

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εκτός από τη μελέτη των μεθόδων MOR σε γενικό πλαίσιο,καλεστήκαμε να υλοποιήσουμε ξεχωριστά τρεις πολύ σημαντικούς αλγορίθμους που ανήκουν στην κατηγορία αυτή. Οι κώδικες που υλοποιήσαμε για τους αλγορίθμους έγιναν στο γραφικό περιβάλλον της MATLAB με την ενσωμάτωση του 'Control System Toolbox' και οι προσομοιώσεις έγιναν πάνω σε σύστημα με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

<b>Operating System Version</b>	microsoft windows 7 professional 2009
<b>Processor</b>	intel(r) core(tm) i3 cpu m370 @ 2.40ghz
<b>Processor Max Speed</b>	2457 MHz
<b>Total Physical Memory</b>	4GB

Πίνακας 8.1: Χαρακτηριστικά του συστήματος μας

Για να ελέγξουμε την ορθότητα των μεθόδων που υλοποιήσαμε χρησιμοποιήσαμε κάποια ενδεικτικά κυκλώματα ,όπου αρχικά ήταν μικρής διάστασης και στη συνέχεια επεκτείναμε τη διάσταση τους για πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα. Στο πίνακα 8.2 περιγράφεται ένα ενδεικτικό κύκλωμα που χρησιμοποιήθηκε με πίνακες C και G διάστασης 280x280 .

Name	Nodes	Current Sources	Resistances	Capacitors
IBM	281	4	360	280

Πίνακας 8.2: Ενδεικτικό Benchmark μικρής διάστασης πίνακα

Προγραμματίζοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω ήμασταν σε θέση να πραγματοποιήσουμε αναπαραστάσεις του συστήματος ώστε να διαπιστώσουμε και στην πράξη τις δυνατότητες που μας παρέχει ο αλγόριθμος TBR σε συνδυασμό με τις μεθόδους LRCF-ADI και EKSM .

Ας υποθέσουμε πως το μέγεθος των πινάκων C και G είναι size x size και το μέγεθος του πίνακα B είναι size x sizeB. Η δημιουργία των νέων πινάκων θα δώσει πίνακες με τις παρακάτω διαστάσεις:

$$A \rightarrow (\text{size} \times \text{size}) \times (\text{size} \times \text{size}) \rightarrow (\text{size} \times \text{size})$$

$$\bar{G} \rightarrow \text{new\_size} \times \text{new\_size}$$

$$\bar{C} \rightarrow \text{new\_size} \times \text{new\_size}$$

$$\bar{B} \rightarrow \text{new\_size} \times \text{sizeB}$$

και τελικά θα λάβουμε συνάρτηση μεταφοράς που θα έχει τις παρακάτω διαστάσεις :

$$\bar{Z} = \bar{B}^T (\bar{G} + s\bar{C})^{-1} \bar{B}$$

$$\bar{Z} \rightarrow (\text{sizeB} \times \text{new\_size}) \times (\text{new\_size} \times \text{new\_size}) \times (\text{new\_size} \times \text{sizeB})$$

$$\bar{Z} \rightarrow (\text{sizeB} \times \text{sizeB})$$

Κάνοντας αντίστοιχη διαδικασία και για την συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού κυκλώματος έχουμε την εξής διάσταση :

$$Z = B^T (G + sC)^{-1} B$$

$$Z \rightarrow (\text{sizeB} \times \text{size}) \times (\text{size} \times \text{size}) \times (\text{size} \times \text{sizeB})$$

$$Z \rightarrow (\text{sizeB} \times \text{sizeB})$$

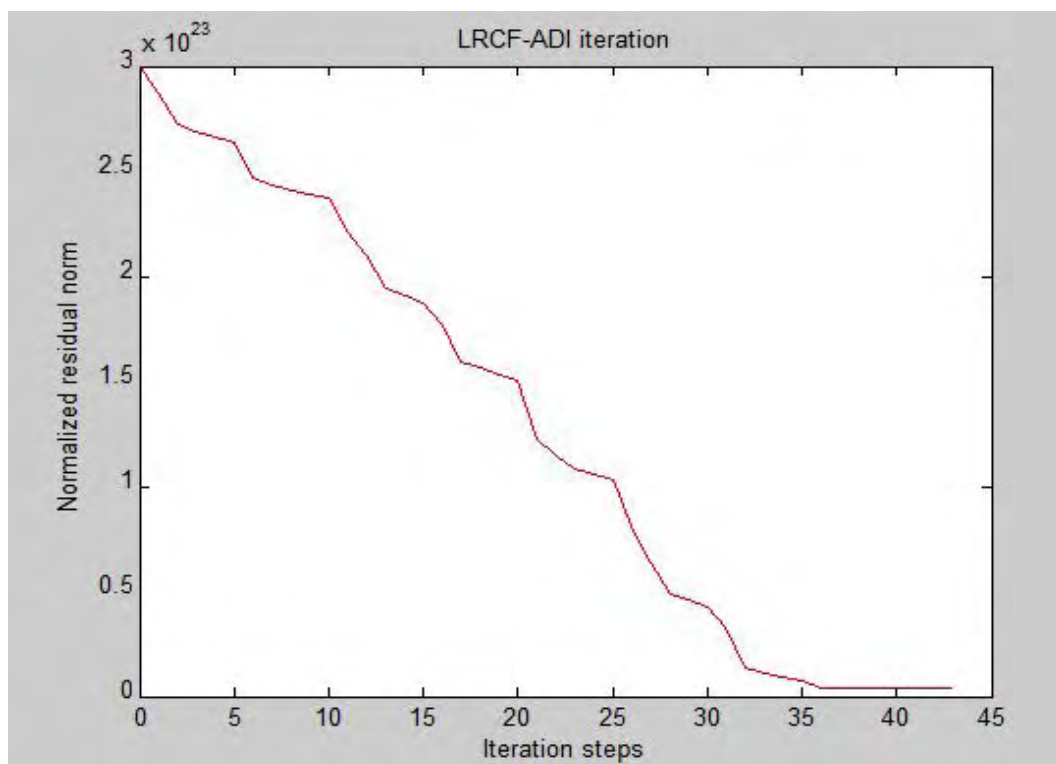
Εύκολα παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του ελαττωμένου μοντέλου μετά την εφαρμογή του MOR αλγορίθμου θα έχει ακριβώς την ίδια διάσταση με την αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού μοντέλου όπως θα δείξουμε παρακάτω και σε γραφικές αναπαραστάσεις.

## 8.2 Ενδεικτικά Αποτελέσματα Προσομοίωσης

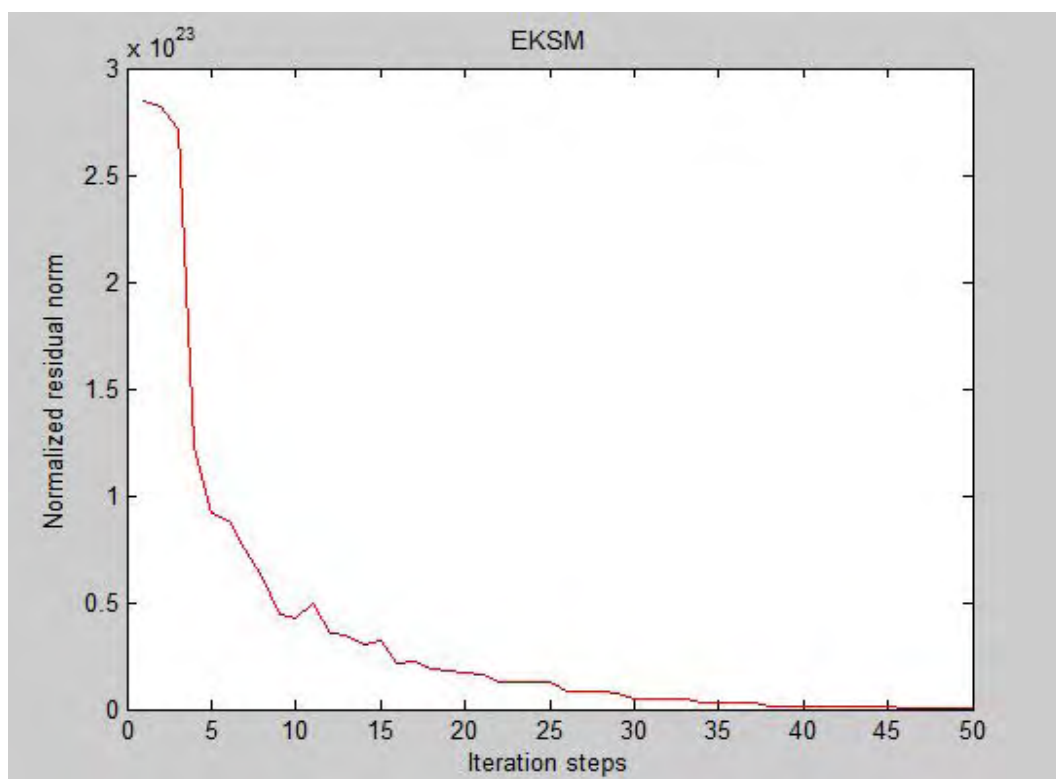
Στο συγκεκριμένο σημείο θα παρουσιάσουμε κάποια από τα αποτελέσματα που πήραμε μετά την υλοποίηση της μεθόδου TBR τα οποία θεωρήσαμε απαραίτητα να συμπεριλάβουμε και στο θεωρητικό ανάπτυγμα της εργασίας.

Όπως έχουμε αναφέρει αρχικά ασχοληθήκαμε με την υλοποίηση των διπλών Lyapunov εξισώσεων του αρχικού συστήματος προκειμένου να υπολογίσουμε προσεγγιστικά τους γραμμικούς πίνακες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας. Για τον σκοπό αυτό κάναμε χρήση πρώτα της μεθόδου LRCF-ADI και έπειτα της μεθόδου EKSM, δυο μέθοδοι που όταν χρησιμοποιούνται για τον υποβιβασμό τάξης μοντέλου (σε συνδυασμό με την TBR) δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Κι στις δυο περιπτώσεις η τάξη της λύσης που παράγεται είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την πραγματική της διάσταση με αποτέλεσμα να έχουμε σημαντική βελτίωση όσον αφορά το χώρο αποθήκευσης και το χρόνο υπολογισμού.

Παρακάτω παρουσιάζουμε το πλήθος των επαναλήψεων για καθεμία μέθοδο ξεχωριστά μέχρι να γίνει η σύγκλιση τους, δηλαδή η νόρμα να πλησιάσει το μηδέν.



Εικόνα 8.1: Η μείωση της νόρμας της διαφοράς των δύο συναρτήσεων μεταφοράς συναρτήσει των ιδιάζουσων τιμών της LFCR-ADI μεθόδου



Εικόνα 8.2: Η μείωση της νόρμας της διαφοράς των δύο συναρτήσεων μεταφοράς συναρτήσει των ιδιάζουσων τιμών της EKSM μεθόδου

Πριν προχωρήσουμε στα επόμενα βήματα του αλγορίθμου TBR θα θέλαμε να αναφέρουμε κάποιες διαφορές που παρατηρήσαμε από τα αποτελέσματα εφαρμογής των δύο low-rank μεθόδων. Οι μέθοδοι που βασίζονται στην ADI επανάληψη παρατηρήσαμε ότι συγκλίνουν γραμμικά ή υπεργραμμικά ενώ οι μέθοδοι που στηρίζονται στους Krylon υποχώρους γενικά παρουσιάζουν μια υπογραμμική σύγκλιση. Στην δεύτερη περίπτωση μπορεί συχνά να παρατηρηθεί μια στασιμότητα των καμπύλων σύγκλισης. Αυτό συμβαίνει ακόμα και σε πολλά συμμετρικά προβλήματα για τα οποία η απόδοση της ADI είναι πολύ γρήγορη και αξιόπιστη. Η βραδύτερη σύγκλιση ωστόσο των Krylon μεθόδων δεν μας προκάλεσε ιδιαίτερη έκπληξη επειδή σχετίζεται με πολυώνυμα στο  $F$  ενώ η ADI βασίζεται σε ένα πρόβλημα ορθολογικής προσέγγισης.

Γενικά οι παράγοντες που παρέχονται από τις Krylon μεθόδους είναι υψηλότερης τάξης και ως εκ τούτου απαιτούν περισσότερη μνήμη για αποθήκευση από εκείνους της ίδιας ακρίβειας που παρέχονται από τις ADI μεθόδους. Η μικρότητα αυτού του βαθμού είναι συχνά κρίσιμη για την πολυπλοκότητα 'έξωτερικών' αλγορίθμων όπως κάποιων αλγορίθμων μείωσης μοντέλου. Αναμφισβήτητα όταν συνδυάζονται με προκαταρκτικούς αλγορίθμους (πχ ILU), οι Krylon μέθοδοι όπως η GMRES ή QMR είναι ισχυρά εργαλεία για την επίλυση των πολύ μεγάλων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Θα πρέπει επίσης να σημειώσουμε ότι οι μέθοδοι υποβιβασμού Krylon για τον υπολογισμό των παραγόντων χαμηλής τάξης μπορεί να αποτύχουν αν  $F + F^T$  δεν είναι αρνητικά ορισμένος. Αντίθετα, μόνο η σταθερότητα του  $F$  είναι απαραίτητη για την σύγκλιση των μεθόδων που βασίζονται στην ADI επανάληψη.

Μια άλλη εξίσου βασική διαφορά που παρατηρήσαμε έγκειται στην πολυπλοκότητα (μνήμη και υπολογισμός) των δύο μεθόδων. Οι Krylon μέθοδοι για να υπολογίσουν τους παράγοντες λύσης των διπλών  $Lyapunov$  εξισώσεων βασίζονται σε γινόμενο πινάκων ενώ στην LRCF-ADI πρέπει να επιλυθούν μετατοπισμένα συστήματα γραμμικών εξισώσεων που είναι μερικές φορές αλλά όχι πάντα ένα σοβαρό μειονέκτημα. Αρχικά, σε ορισμένες περιπτώσεις (π.χ. εάν ο  $F$  έχει μια δομή λεπτής ζώνης) οι παρακάτω λειτουργίες

$$\begin{aligned} Y &\leftarrow F W \\ Y &\leftarrow (F + pI_n)^{-1} W \quad (Re p < 0) \end{aligned}$$

απαιτούν περίπου το ίδιο ποσό υπολογισμού.

Σε πολλές άλλες πάλι περιπτώσεις μπορούν να εφαρμοστούν αποδοτικά οι Krylon Subspace μέθοδοι σε συστήματα γραμμικών εξισώσεων για την επίλυση της  $Y \leftarrow (F + pI_n)^{-1} W \quad (Re p < 0)$ . Τέλος, θα θέλαμε να τονίσουμε ότι το υπολογιστικό κόστος ανά βήμα επανάληψης αυξάνεται στις Krylon Subspace μεθόδους διπλών

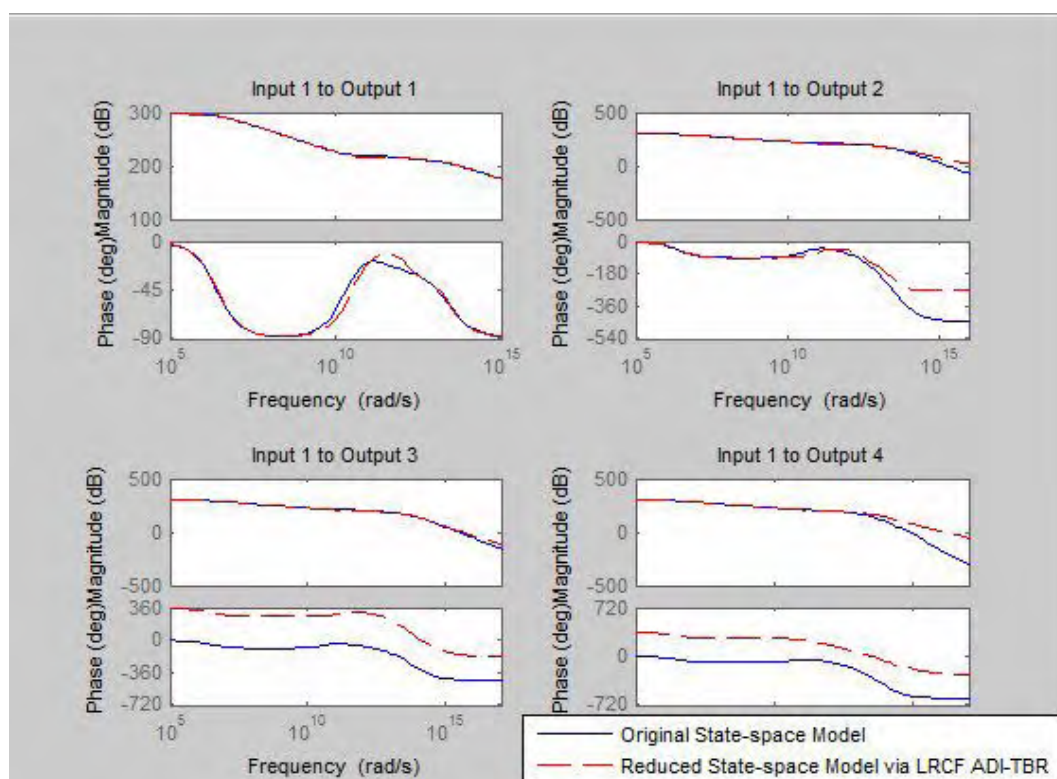
lyapunov εξισώσεων καθώς βασίζονται στη διαδικασία Arnoldi, ενώ το κόστος για τον αλγόριθμο LRCF-ADI είναι σταθερό.

Λαμβάνοντας υπόψη όλες αυτές τις εκτιμήσεις, πιστεύουμε ότι η LRCF-ADI είναι σε πολλές περιπτώσεις η μέθοδος επιλογής για την επίλυση μεγάλων lyapunov εξισώσεων, ιδιαίτερα όταν η μικρότητα του βαθμού των υπολογισμένων παραγόντων LRCF διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο και είναι επιθυμητή η υψηλή ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης.

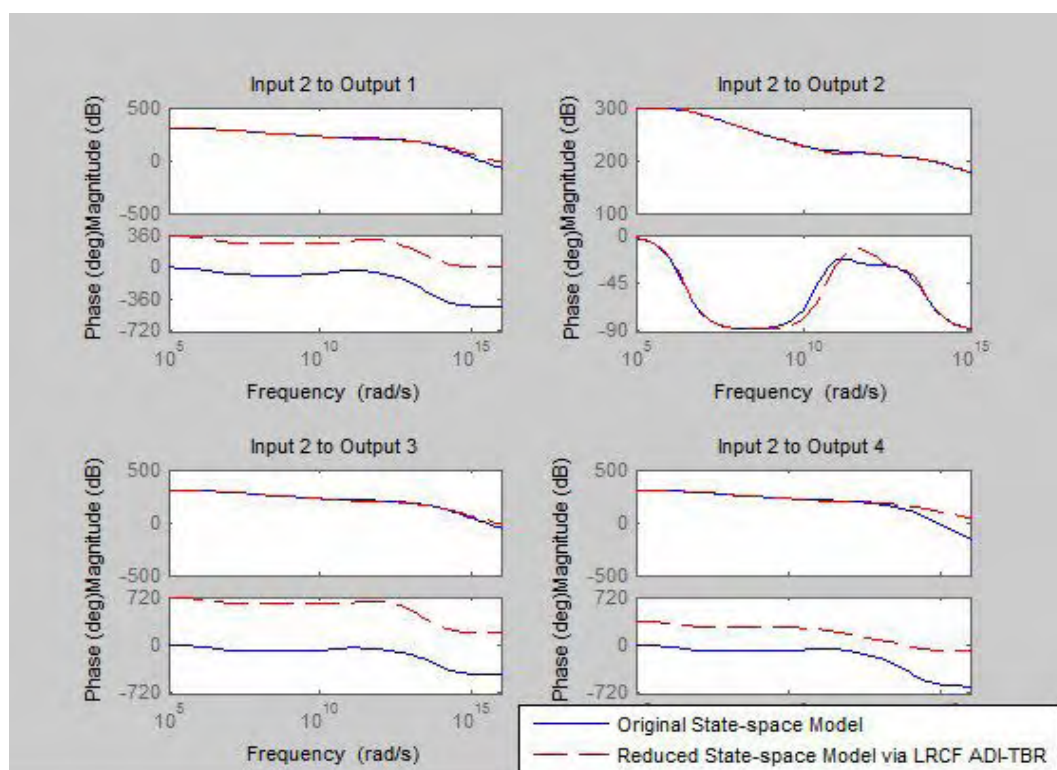
Στην συνέχεια για να διαπιστώσουμε ότι τα αποτελέσματα που πήραμε και από τις δύο low rank μεθόδους είναι σωστά, τρέξαμε τις εξισώσεις με το lyap του matlab και τα αποτελέσματα τα συγκρίναμε με τα αρχεία eksm.m, lrcfadi.m τα οποία υλοποιήσαμε εμείς. Παρατηρήσαμε ότι οι πίνακες που παράγει το eksm.m είναι ίδιοι μέχρι το 5ο δεκαδικό ψηφίο σε σχέση με το lyap του matlab ενώ οι πίνακες του lrcfadi.m είναι ίδιοι μέχρι το 7ο δεκαδικό ψηφίο. Αυτό σημαίνει ότι με την χρήση και των δύο μεθόδων παίρνουμε μια πολύ καλή προσέγγιση της λύσης των lyapunov εξισώσεων όπως και επιθυμούσαμε.

Αφού εφαρμόσαμε τις δυο παραπάνω low rank μεθόδους συνεχίσαμε με την υλοποίηση της μεθόδου TBR πάνω στο μοντέλο για να βελτιστοποιήσουμε την τάξη του. Οι διαδικασίες αυτές έχουν αναλυθεί λεπτομερώς σε προηγούμενα κεφάλαια, γι αυτό και στο σημείο αυτό τις προσπερνάμε. Θέλουμε ωστόσο να σταθούμε στην παρατήρηση που κάναμε για την νόρμα της διαφοράς των συναρτήσεων μεταφοράς των μειωμένων συστημάτων και του αρχικού. Παρατηρήσαμε λοιπόν ότι σε κάθε επανάληψη, όσο μεγάλωνε το πλήθος των ιδιάζουσων τιμών που κρατούσαμε στο σύστημα, η νόρμα της διαφοράς των συναρτήσεων μεταφοράς έφθινε ομαλά προς το μηδέν. Μόλις το σφάλμα της συνάρτησης μεταφοράς των μειωμένων συστημάτων και του αρχικού ξεπέρασε το διπλάσιο του αθροίσματος των αποκομμένων Hankel τιμών σταματήσαμε την περικοπή των καταστάσεων που είναι τουλάχιστον μη ελέγξιμες ή μη παρατηρήσιμες και καταφέραμε να παράγουμε την τάξη του νέου μοντέλου.

Παρακάτω παρουσιάζουμε κάποιες τελευταίες αναπαραστάσεις των συστημάτων, τις οποίες θεωρήσαμε σημαντικές να συμπεριλάβουμε για την διεξαγωγή των τελικών συμπερασμάτων. Αναπαριστούμε στην ίδια γραφική τις κυματομορφές της απόκρισης συχνότητας ως προς τη συχνότητα του αρχικού και του ελαττωμένου μοντέλου κάνοντας χρήση πρώτα της μεθόδου LRCF-ADI (Εικόνες 8.3, 8.4, 8.5, 8.6) και έπειτα της μεθόδου EKSM (Εικόνες 8.7, 8.8, 8.9, 8.10) για 4 εισόδους ως προς 4 εξόδους.

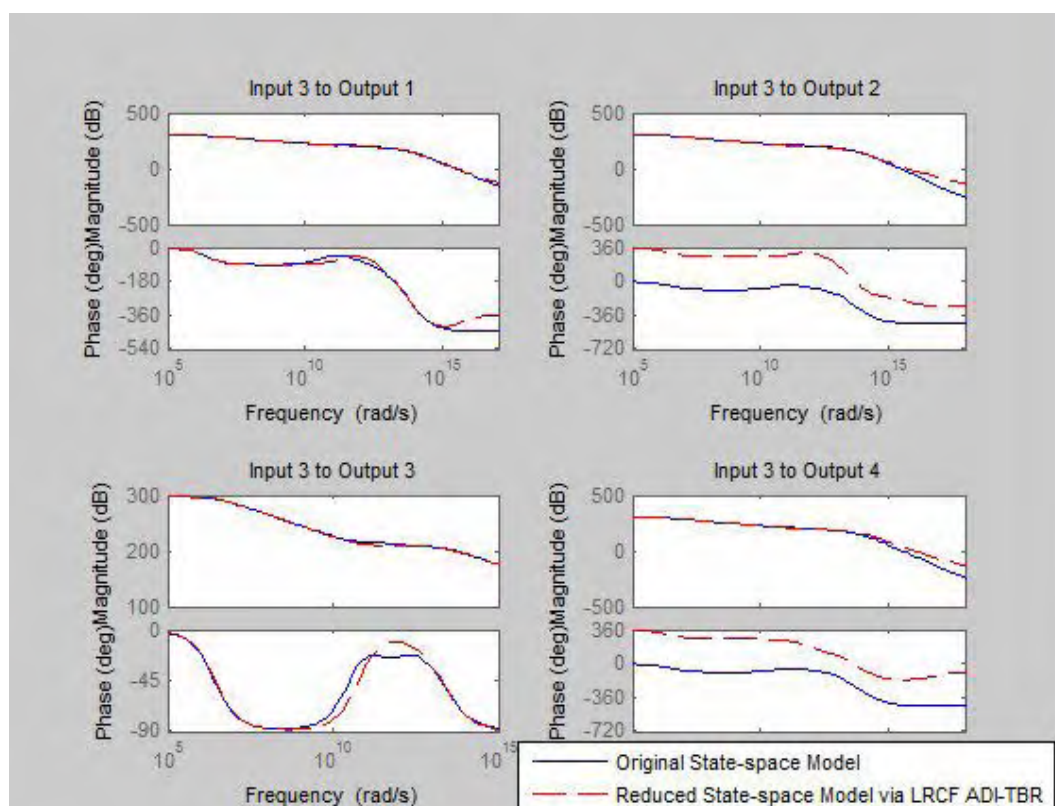


Εικόνα 8.3: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 1η είσοδο με την LRCF ADI-TBR

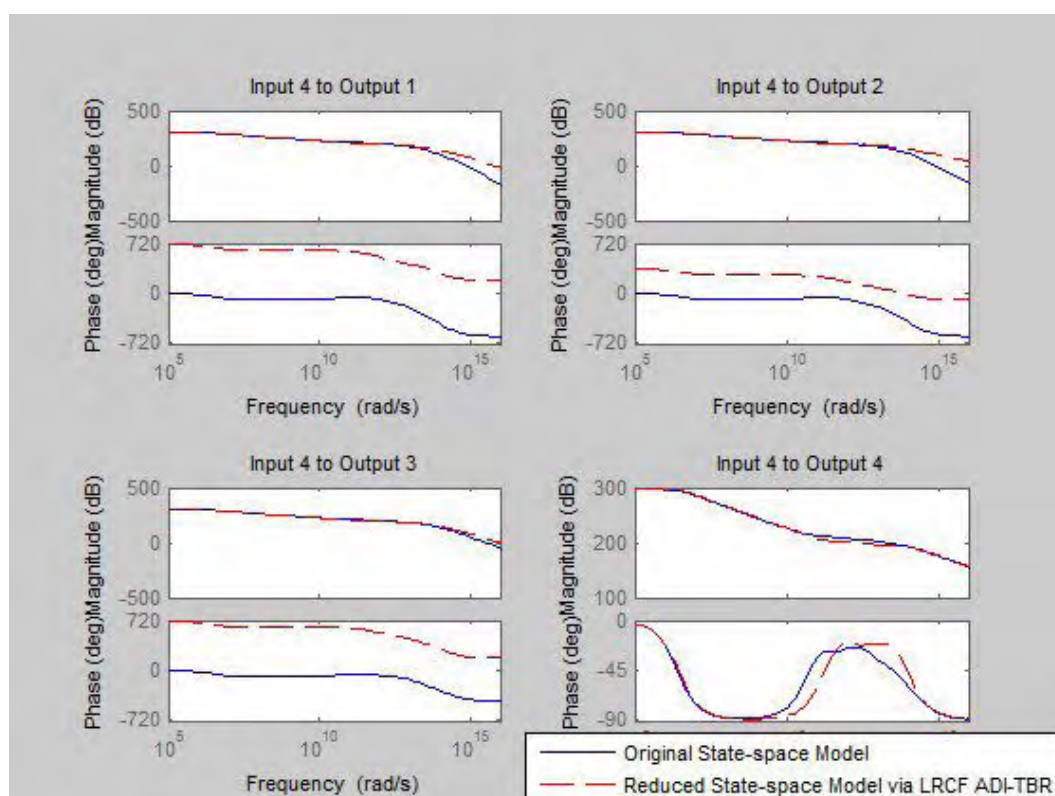


Εικόνα 8.4: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 2η είσοδο με την LRCF ADI-TBR



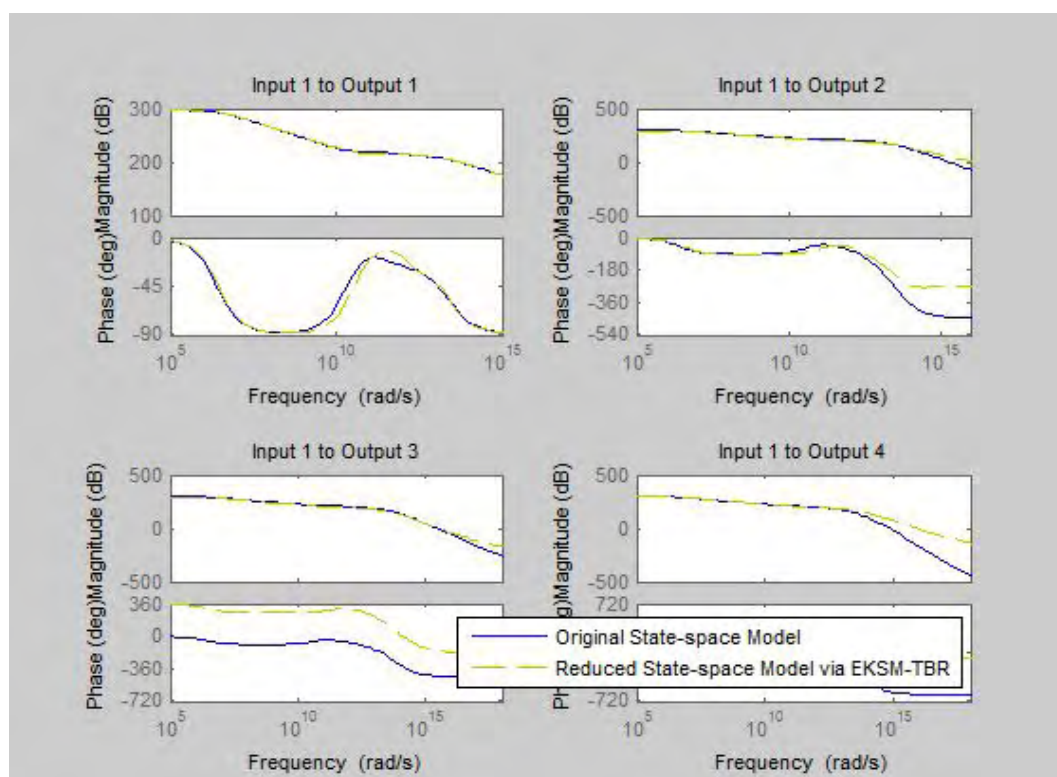


Εικόνα 8.5: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 3η είσοδο με την LRCF ADI-TBR

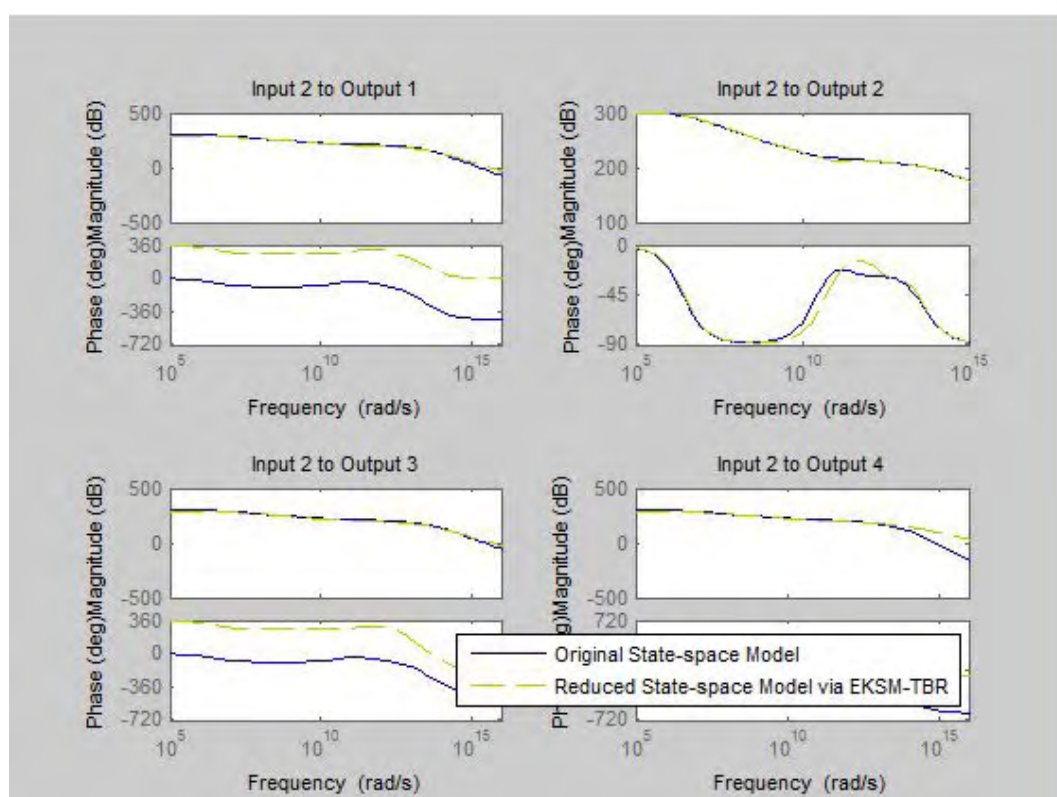


Εικόνα 8.6: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 4η είσοδο με την LRCF ADI-TBR

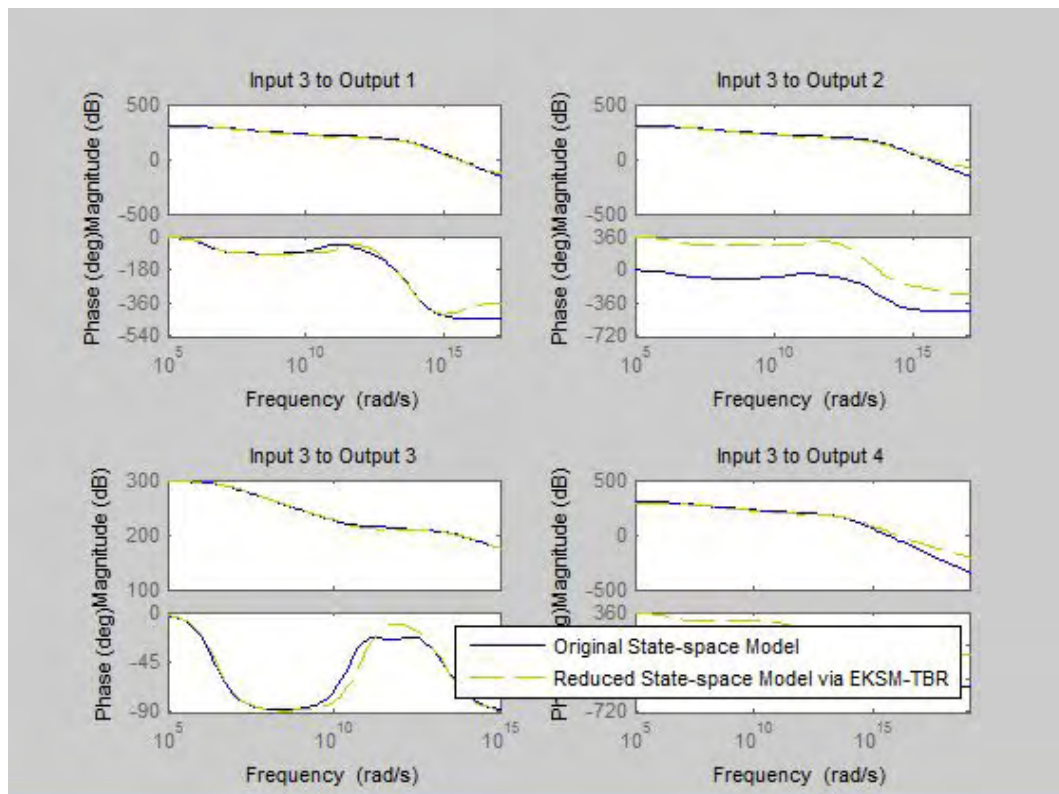




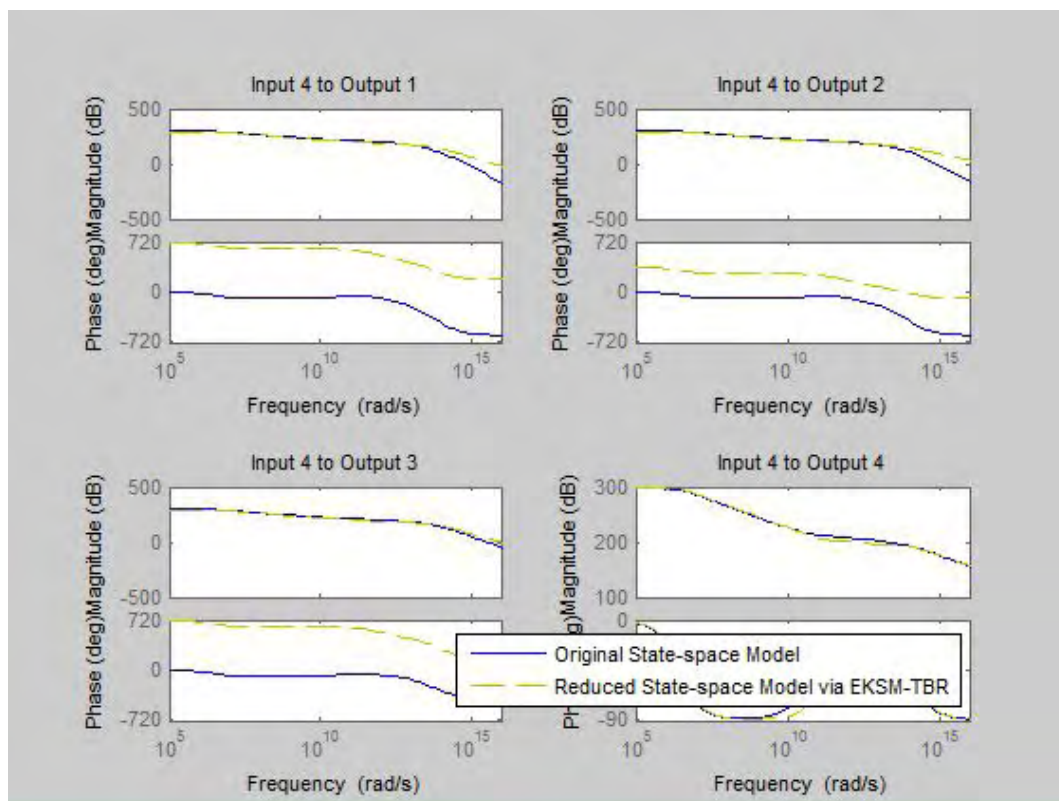
Εικόνα 8.7: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 1η είσοδο με την EKSM-TBR



Εικόνα 8.8: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 2η είσοδο με την EKSM-TBR



Εικόνα 8.9: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 3η είσοδο με την EKSM-TBR



Εικόνα 8.10: Απόκριση συχνότητας αρχικού - τελικού μοντέλου συστήματος για την 4η είσοδο με την EKSM-TBR

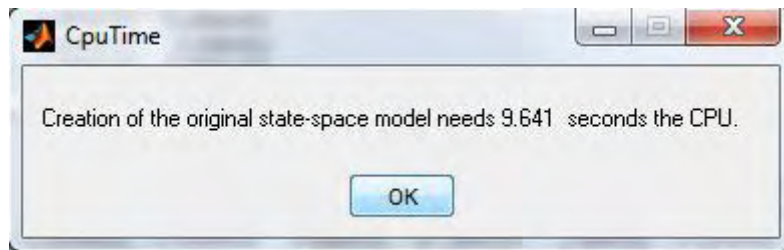
Στο πεδίο magnitude συγκρίναμε τις κυματομορφές των τριών συστημάτων και διαπιστώσαμε ότι συμπίπτουν οι γραφικές τους παραστάσεις. Το γεγονός αυτό είναι το αναμενόμενο καθώς όπως αναφέραμε και προηγουμένως η συμπεριφορά του ελαττωμένου κυκλώματος πρέπει να είναι ίδια ή αρκετά όμοια με αυτή του αρχικού κυκλώματος. Από την άλλη παρατηρήσαμε ότι στην φάση προκύπτουν κάποια μικρά προβλήματα, τα οποία όμως δεν μας προβλημάτισαν γιατί γενικά συμβαίνουν για μικρά συστήματα πόσο μάλλον για ένα σύστημα  $280 \times 280$  με συντελεστές  $10^{11}$ .

Τέλος παραθέτουμε τους χρόνους που χρησιμοποιήθηκε η CPU από το σύστημα μας για την δημιουργία των απαιτούμενων πινάκων καθώς και την τιμή της κλίμακας σε κάθε περίπτωση (Πίνακας 8.3).

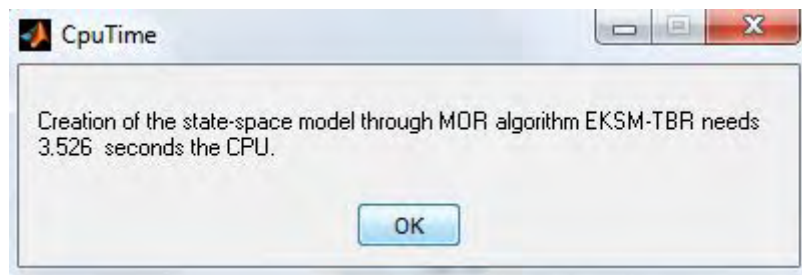
	<b>Original</b>	<b>Reduced EKSM</b>	<b>Reduced LRCF-ADI</b>
<b>Benchmark</b>	$q = 280$	$q = 280-43=237$	$q = 280-50=230$
<b>CPU</b>	$t = 9,641 \text{ s}$	$t = 3,526 \text{ s}$	$t = 3,031 \text{ s}$

Πίνακας 8.3: Σημαντικά στοιχεία του μειωμένου συστήματος σε σχέση με το αρχικό

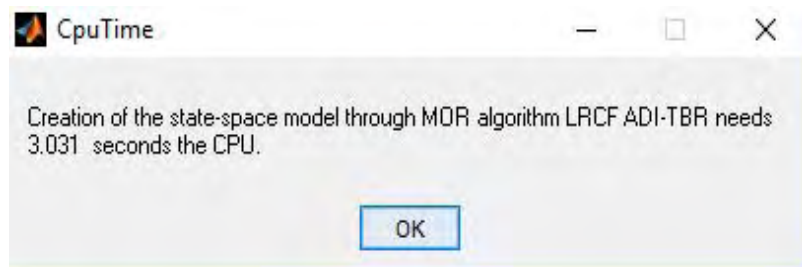
Η τάξη του αρχικού συστήματος που μας δόθηκε ήταν  $q = 280$  ενώ ο χρόνος που χρησιμοποιούσε το σύστημα αυτό την CPU ήταν 9,641 seconds (Εικόνα 8.11). Μετά την εφαρμογή της TBR σε συνδυασμό με την μέθοδο EKSM κάναμε ελαχιστοποίηση του συστήματος σε κλίμακα  $q = 237$  και ο χρόνος της CPU βελτιώθηκε στα 3,526seconds (Εικόνα 8.12). Παράλληλα κάναμε την ίδια διαδικασία, εφαρμόζοντας την TBR σε συνδυασμό με την μέθοδο LRCF-ADI και παρατηρήσαμε ότι το αρχικό σύστημα μειώθηκε σε κλίμακα  $q=230$  ενώ ο χρόνος της CPU κατέβηκε στα 3,031seconds(Εικόνα 8.13). Είναι προφανές λοιπόν ότι όσο βελτιώνεται η τάξη του συστήματος τόσο βελτιώνονται και οι χρόνοι για την εξαγωγή των πινάκων και την προσομοίωση του κυκλώματος.



Εικόνα 8.11: Χρήση CPU (σε sec) παραγωγής αρχικού μοντέλου συστήματος



Εικόνα 8.12: Χρήση CPU (σε sec) παραγωγής μειωμένου μοντέλου συστήματος μέσω της EKSM -TBR



Εικόνα 8.13: Χρήση CPU (σε sec) παραγωγής μειωμένου μοντέλου συστήματος μέσω της LRCF ADI-TBR

### 8.3 Παρατηρήσεις

Σύμφωνα με τη μελέτη και τις δοκιμές που κάναμε καταφέραμε να μειώσουμε τη τάξη του αρχικού μοντέλου συστήματος καθώς και να ελαχιστοποιήσουμε το χρόνο προσομοίωσης του για μετέπειτα χρήση. Ο τελικός μας στόχος ήταν να αποδείξουμε ότι η συμπεριφορά του ελαττωμένου κυκλώματος είναι ίδια ή αρκετά όμοια με αυτή του αρχικού κυκλώματος. Το γεγονός αυτό αποδείχθηκε μέσω των διαγραμμάτων

Bode καθώς η απόκριση συχνότητας του τελικού συστήματος προσεγγίζει αρκετά την αντίστοιχη απόκριση του αρχικού μοντέλου. Όταν μιλάμε βέβαια για συστήματα πρέπει να λάβουμε υπόψιν και τους πόρους του γι αυτό και ελαχιστοποιήσαμε παράλληλα και το ποσοστό χρησιμοποίησης τους σε σχέση με το αρχικό μοντέλο. Ως αποτέλεσμα οι απαιτήσεις για χρήση της CPU και μνήμης που χρειαζόταν το αρχικό κυκλωματικό μοντέλο μειώθηκαν σε μεγάλο βαθμό.

Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

## Επίλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε σε βάθος την κατηγορία των μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου MOR, οι οποίες εφευρέθηκαν για να βελτιώσουν την αποτελεσματικότητα της προσομοίωσης των πολύ μεγάλων συστημάτων. Είπαμε ότι ο κύριος στόχος των μεθόδων αυτών είναι να βρουν ένα μειωμένης τάξης μοντέλο (ROM) που έχει παρόμοια συμπεριφορά εισόδου-εξόδου με το αρχικό μοντέλο ώστε να είναι ευκολότερα διαχειρίσιμο και να αποφεύγονται μεγάλα ποσοστά χρόνου και αποθηκευτικού χώρου. Αφού μιλήσαμε σε γενικά πλαίσια για τις MOR μεθόδους επικεντρώσαμε το ενδιαφέρον μας στην αποδοτική μέθοδο TBR, την οποία και υλοποιήσαμε σε συνδυασμό με δυο άλλες εξίσου σημαντικές μεθόδους της κατηγορίας, την LRCF-ADI και την EKSM.

Μελετήσαμε ξεχωριστά την καθεμία μέθοδο σε διαφορετική ενότητα δίνοντας τον ορισμό της και τα κύρια χαρακτηριστικά της. Αναφέραμε σαν κύριο χαρακτηριστικό της μεθόδου TBR την ιδιότητα της να παράγει ένα νέο, μικρότερης διάστασης μοντέλο συστήματος αλλά συγχρόνως να διατηρεί τις αρχικές του ιδιότητες όπως την παθητικότητα, την ευστάθεια και να παρέχει υπολογίσιμα όρια σφάλματος. Στην συνέχεια αναφερθήκαμε στις Low Rank μεθόδους, LRCF-ADI και την EKSM, τις οποίες κι χρησιμοποιήσαμε στο αρχικό στάδιο υλοποίησης της TBR για τον υπολογισμό των διπλών εξισώσεων Lyapunov του μεγάλου συστήματος, δίνοντας ως λύση, χαμηλής τάξης παράγοντες Cholesky, των γραμμικών διανυσμάτων. Τονίσαμε ότι η τάξη της λύσης που παράγουν οι συγκεκριμένες μέθοδοι είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την πραγματική της διάσταση και επομένως επιτρέπει μια καλή προσέγγιση μέσω παραγόντων λύσης χαμηλού επιπέδου, με αποτέλεσμα να έχουμε σημαντική βελτίωση και ένα μεγάλο πλεονέκτημα όσον αφορά τον χώρο αποθήκευσης και την υπολογιστική ταχύτητα.

Περιγράψαμε επίσης τον ορισμό μιας τυπικής προσομοίωσης, τι χρειάζεται και πως μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το κύκλωμα μας από το αρχείο περιγραφής κυκλώματος που μας δώθηκε, αλλά και να το απλοποιήσουμε στην

συνέχεια κάνοντας χρήση της μεθόδου TBR ώστε να λυθεί το σύστημα πολύ γρηγορότερα σε σχέση με το αρχικό. Τέλος αναλύσαμε τα αποτελέσματα του αλγορίθμου TBR που πήραμε από τα αρχεία περιγραφής κυκλωμάτων κάνοντας χρήση και των δύο Low Rank μεθόδων που υλοποιήσαμε ώστε να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την TBR ως σύνολο. Μέσα από τα πειράματα που τρέξαμε παρατηρήσαμε πως η συνάρτηση μεταφοράς που αρχικού κυκλώματος προσεγγίζει σε πολύ μεγάλο βαθμό την συνάρτηση μεταφοράς του μετέπειτα ελαττωμένου κυκλώματος, πράγμα που δικαιολογεί το γεγονός ότι θεωρείται μια από τις αποδοτικότερες μεθόδους ελάτωσης τάξης συστήματος.

## 9.1 Μελλοντικές επεκτάσεις

Μια πιθανή επέκταση στην παρούσα εργασία θα μπορούσε να είναι:

- Η ανάπτυξη κατάλληλων μεθόδων αποθήκευσης των προσεγγιστικών πινάκων χρησιμοποιώντας δομές αραιών πινάκων.
- Η υλοποίηση των Low Rank μεθόδων σε παράλληλες αρχιτεκτονικές .

Οι κώδικες και των τριών αλγορίθμων είναι διαθέσιμοι, για την λήψη τους επικοινωνήστε σε κάποιο από τα παρακάτω mail: [mardiama@uth.gr](mailto:mardiama@uth.gr), [alrosi@uth.gr](mailto:alrosi@uth.gr), [rosi@uth.gr](mailto:rosi@uth.gr)



Η σελίδα αυτή είναι σκόπιμα λευκή.

# Βιβλιογραφία

[1] “*Static and Dynamic Systems*” ,Yon-Ping Chen, NCTU Department of Electrical and Computer Engineering Course <Dynamic System Analysis and Simulation>.

[2] [https://en.wikipedia.org/wiki/State\\_variable](https://en.wikipedia.org/wiki/State_variable)

[3] “*State Space Representations of Linear Physical Systems*”,course in linear systems taught at the Department of Engineering at Swarthmore College .

[4] “*Transformation:Transfer Function -State Space*”, course in linear systems taught at the Department of Engineering at Swarthmore College .

[5] [https://en.wikibooks.org/wiki/Control\\_Systems/Poles\\_and\\_Zeros](https://en.wikibooks.org/wiki/Control_Systems/Poles_and_Zeros)

[6] “*Σεμινάριο Αυτομάτου Ελέγχου, Εξισώσεις εσωτερικής κατάστασης–Ελεγκσιμότητα και Παρατηρησιμότητα* “ ,Δ.Καλλιγερόπουλος.

[7] [https://en.wikibooks.org/wiki/Control\\_Systems/Controllability\\_and\\_Observability](https://en.wikibooks.org/wiki/Control_Systems/Controllability_and_Observability)

[8] “*An Introduction to the Modified Nodal Analysis*”, Michael Hanke ,May 2006.

[9]<http://esperia.iesl.forth.gr/~kafesaki/Applied-Mathematics/linear-algebra/vector-spaces-print.htm>

[10] “*Introduction to Model Order Reduction - Springer*”, Wil Schilders ,Eindhoven University of Technology, Faculty of Mathematics and Computer Science,The Netherlands.

[11] “*Basic principles and aims of model order reduction in compliant mechanisms*”, M. Rosner and R. Lammering, Institute for Mechanics, Helmut-Schmidt-University/University of the Federal Armed Forces Hamburg,Holstenhofweg 85, 22043 Hamburg, Germany, 2011.

[12] “*A Sequential Reduction Scheme in Reduced Order Modelling of Large Scale Systems*”, Behnam Salimbahrami, Institute of Automatic Control, Technische Universität München Boltzmannstr. 15, D-85748 Garching, Germany (2010).

- [13] *"Algorithms for model reduction of large dynamical systems"*, Thilo Penzl, Department of Mathematics and Statistics, University of Calgary, Calgary, Alta, Canada T2N1N4 (2006).
- [14] *"Guaranteed Passive Balancing Transformations for Model Order Reduction"*, Joel R. Phillips, Member IEEE, Luca Daniel, Student Member IEEE and L. Miguel Silveira, Senior Member IEEE.
- [15] *"Model reduction for piezo-mechanical systems using balanced truncation"*, Mohammad Monir Uddin, Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet (2011).
- [16] *"Numerical Solution of Large and Sparse Continuous Time Algebraic Matrix Riccati and Lyapunov Equations: A State of the Art Survey"*, Peter Benner and Jens Saak, GAMM-Mitt. 36 , No. 1, 32 – 52 (2013) ,Wiley Online Library.
- [17] *"Model Order Reduction of Continuous LTI Large Descriptor System Using LRCF-ADI and Square Root Balanced Truncation"*, Mehrab Hossain Likhon, Shamsil Arifeen, and Mohammad Sahadet Hossain, Proceedings of the World Congress on Engineering 2015 Vol I WCE 2015, London, U.K.
- [18] *"Efficient Numerical Solution of Large Scale Algebraic Matrix Equations in PDE Control and Model Order Reduction"*, Jens Saak 's dissertation submitted to Faculty of Mathematics at Chemnitz University of Technology (2009).
- [19] *"Low-Rank Solution of Lyapunov Equations"*, Jing-Rebecca Li and Jacob White, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications October 29, 2004.
- [20] *"Solving large-scale control problems "*, Peter Benner, IEEE Control Systems Magazine, February 2004.
- [21] *"A Galerkin-Newton-ADI Method for Solving Large-Scale Algebraic Riccati Equations"*, Peter Benner and Jens Saak, Deutsche Forschungsgemeinschaft ,January 2010.
- [22] *"Computationally enhanced projection methods for symmetric Sylvester and Lyapunov matrix equations"*, Davide Palitta and Valeria Simoncini, February 2017.
- [23] *"A New Iterative Method for Solving Large-Scale Lyapunov Matrix Equations"*, V.SIMONCINI, 2006.

[24] *"A new investigation of the Extended Krylov subspace method for matrix function evaluations"*, L. KNIZHNERMAN AND V. SIMONCINI, 2009.

[25] *"Extended Krylov subspace for parameter dependent systems"*, V. SIMONCINI, 2009.

[26] *"Σημειώσεις μαθήματος "Προσομοίωση Κυκλωμάτων"*, Διδάσκων Ευμορφόπουλος Νέστωρ, Φθινόπωρο 2011, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.